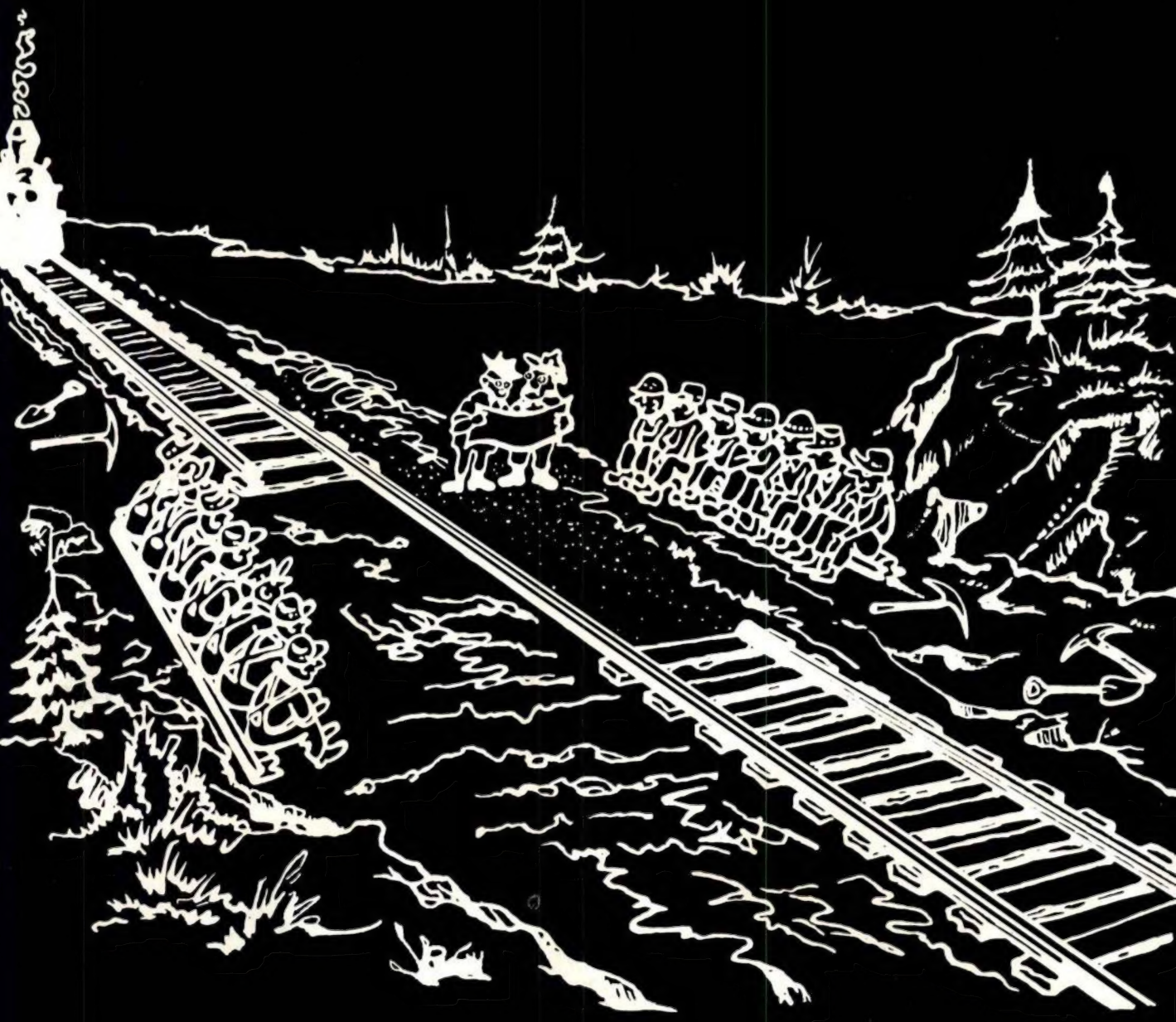
técnica



456

associação dos estudantes do instituto superior técnico

janeiro 1980

revista de engenharia

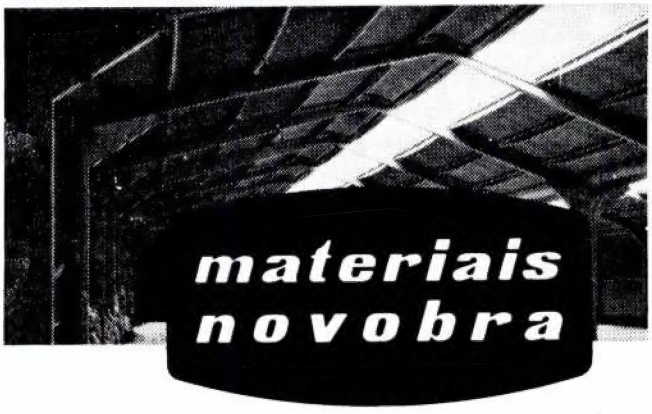
Já pensou...

... que o seu anúncio
é muito eficaz se for
publicado na revista que
os seus clientes lêem?
Os milhares de exemplares
de cada número da nossa revista
são lidos por engenheiros
e técnicos, por pessoas ligadas
à indústria, à investigação, ao
ensino, pelos seus clientes,
em suma. Consulte-nos

técnica REVISTA DE ENGENHARIA

PÓRTICOS "CRENDON"

De pré-fabricacão total, montagem rapidíssima feita pelas n/ equipas especializadas e de aproveitamento total de todo o espaço em altura visto não existirem linhas de asnas.



A mais vasta gama em pré-fabricados de betão.

Pavimentos, coberturas, asnas, perfis especiais, «post-esforço Losinger», pontões, vigas de grande vão, pórticos «Crendon», pavimento «Trief», protecção de segurança «Trief», mosaicos, tubos, blocos «Leca», espaçadores de betão, estacas para vinhas e pomares e pré-fabricação total ou parcial.

Fábricas em: Lisboa, Leiria, Lagoa, Guarda e Moita.

Sede: Av. Est. Unidos da América, 100-5.º Dt.º — Lisboa-5
Telefones — Serviços Administrativos: 77 48 32 - 77 29 53 • Telex: 18373 NOVOBA P
Serviços Técnicos: 89 41 16/7/8 - 89 93 31/2

CONSTRUA COM CONFIANÇA - CONSULTE-NOS

Iluminação pública e industrial.

SCHRÉDER, S.A.R.L.

Carnaxide-Tel.2180037

técnica

NÚMERO 456 JANEIRO 1980 ANO LV VOLUME XLI PUBLICAÇÃO MENSAL

DIRECTOR
José Luís S. V. Azevedo

COLABORADORES
João José Águas
Sérgio Duarte Santos (F. C. Tecnologia — Coimbra)

FUNCIONÁRIOS
Jorge Graça
Fernanda Sanches

DIRECÇÃO, REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO
Av. Rovisco Pais, I.S.T.—1000 Lisboa
Telefone 88 93 23

PROPRIETÁRIO
A. E. I. S. T.

•

ASSINATURAS: 10 n.os

Continente e Ilhas	450$00
Países de língua Portuguesa e Espanha	550$00
Estrangeiro	700$00 (US$15)
Número avulso ...	80$00

Encontram-se à venda na Secção Técnica, A. E. I. S. T., praticamente todos os números publicados até à data. Os preços são:

1 a 430 (inclusive)	— 10$00 ex.
431 a 437 (»)	— 35$00 ex.
438 a 450 (»)	— 60$00 ex.
451 e seguintes	— 80$00 ex.

* Excepto números duplos ou especiais.

Não se publica em Agosto e Setembro.

Os artigos assinados são da exclusiva responsabilidade dos autores.

•

COMPOSIÇÃO E IMPRESSÃO:
OF. GRÁFICAS DE RÁDIO RENASCENÇA
Rua Duques Bragança, 6 — 1200 LISBOA

SUMÁRIO

189 — Aplicação de diversos métodos de cálculo ao estudo de uma lage contínua de dois tramos — ANTÓNIO O. CALDINHAS, FERNANDO A. B. BRANCO e JOÃO JOSÉ R. T. AZEVEDO.

Application of some calculation methods to the study of a a continuos plate with two panels.

201 — Evolutas das cónicas. Estudo das suas principais características — F. PERES RODRIGUES.

Evolutes of the conics study of their main characteristics.

213 — Algumas ocorrências scheelíticas em rochas calco-silicatadas do norte de Portugal — A. F. FERREIRA PINTO e A. F. BARROS.

Some occurrences of scheelite in calc-silicate rocks from Northern Portugal.

227 — Measurement of particle and gas velocities in a DC arc heater using laser doppler anemometry — D. F. G. DURÃO, A. MELLING, R. K. BAYLISS e I. G. SAYCE.

Medição com a anemometria do laser das velocidades do escoamento e das partículas por ele transportadas num arco de plasma D. C.

233 — Notas sobre o comportamento térmico da tensão de Early e do ganho de corrente dum transistor de junção bipolar — P. L. BORGES TEIXEIRA.

Comments on the thermal behaviour of the Early voltage and the current gain of a bipolar junction transistor.

239 — Propagation characteristics on a continuously slotted coaxial cable — A. S. CARVALHO FERNANDES.
Características da propagação dum modo quase-tem ao longo dum cabo coaxial de fenda longitudinal contínua.

199 — Noticiário

CAPA — Gravura usada no cartaz de divulgação do 1.° ciclo de cursos sobre Gestão de Sistemas de Transportes organizado em 1979/80 pelo CESUR (ver noticiário pág. 199).

CONSELHO CIENTÍFICO

Alves, Luís de Almeida
Barros, Luís A. Aires
Calado, Jorge C. G.
Conte, J. C.
Costa, Fernando Vasco
Dias, A. Romão
Domingos, J. J. Delgado
Faro, Manuel José de Abreu
Ferreira, J. Campos
Figanier, J. P.
Garrido, M. S.
Horta, Ricardo Bayão
Loureiro, A. Pádua
Manzanares, Alberto Abecassis
Moura, Domingos
Moura, J. M. Fonseca de
Moutinho, A. M. C.
Oliveira, E. R. de Arantes e
Portela, A. Gouvêa
Quintela, António de Carvalho
Rogado, José Quintino
Santos, A. F. Ferreira dos
Serafim, J. Laginha
Simões, F. Rebelo
Silva, J. Borges da
Tavares, L. Valadares
Trindade, Rocha

ÍNDICE ALFABÉTICO DOS ANUNCIANTES

	Pág.
Aguiar & Melo, Lda.	I
ATLAS COPCO	V
Construções Schréder	2.ª da capa
FÉRIA-SERIC, Lda.	II
Ferrominas, E. P.	IV
MAGUE	III
Metropolitano de Lisboa...	VII
Novobra, Lda.	2.ª da capa
Soc. Portuguesa Cavan	II
Sopecate	II
TUDOR	VI e VIII

Colaboram neste número as seguintes Agências de Publicidade: SISTEMA e LATINA.

técnica

NÚMERO 456 JANEIRO 1980 ANO LV VOLUME XLI

Aplicação de diversos métodos de cálculo ao estudo de uma laje contínua de dois tramos **

ANTÓNIO O. CALDINHAS (*)
FERNANDO A. B. BRANCO (*)
JOÃO JOSÉ R. T. AZEVEDO (*)

RESUMO

No presente artigo faz-se uma análise comparativa dos resultados obtidos por diversos métodos de cálculo de lajes, aplicados a um problema concreto. Descrevem-se os métodos e as expressões de cálculo utilizados, comparando-se por fim os resultados analítica e graficamente.

SYNOPSIS

A comparative analysis of the results obtained from some methods for plates calculation, applied to a concret problem, is shown in this paper. It begins with a description of the methods and the calculation expressions used. Finally an analitical and graffical comparation of the results is made.

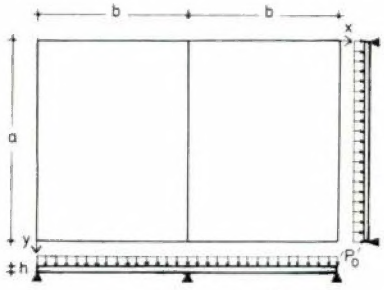
NOTAÇÃO

$W(x, y)$ — Deslocamento vertical no ponto (x, y)
P_o — Distribuição uniforme de carga
a, b — Dimensões dos tramos da laje
h — Altura da laje
E — Módulo de elasticidade
V — Coeficiente de Poisson
M_{11}, M_{22} — Momentos flectores
M_{21}, M_{12} — Momentos torsores
T_1, T_2 — Esforços transversos
R_1, R_2 — Reacções nos apoios

(*) — Alunos finalistas de Engenharia Civil (1975/76).
** — Manuscrito recebido para publicação em 28/3/77.

1 — INTRODUÇÃO

Neste trabalho analisa-se uma laje contínua, de dois tramos, simplesmente apoiada, sujeita à acção de uma carga uniformemente distribulda (Fig. 1).



P_o = 1.0 tfm^{-2} E = 3 x 10^6 tfm^{-2}
a = 4.0 m ∂ = 0.20
b = 3.0 m
h = 0.10 m

FIG. 1

O cálculo processa-se utilizando três tipos de métodos: analíticos, numéricos e de analogia física.

Nos primeiros efectua-se a integração analítica da equação de Lagrange, utilizando o desenvolvimento em séries simples e duplas de Fourier.

Os segundos agrupam dois subtipos: os que resultam da integração numérica da equação de Lagrange e os que se obtêm discretizando a laje e considerando em cada subdomínio uma função de deslocamentos diferente que é compatibilizada na fronteira do subdomínio.

O último tipo contém certos métodos de uso corrente, caracterizados por grande facilidade de aplicação, tais como o método das faixas, o método das grelhas e a utilização de tabelas.

Os resultados obtidos comparam-se de modo a poder-se inferir do rigor relativo de cada um dos métodos, apresentando-se os diagramas de deformadas, esforços e reacções.

2 — MÉTODOS ANALÍTICOS

2.1 — Método de Maurice Levy

A solução que se apresenta com base no método de Maurice Levy, consiste no desenvolvimento em séries de Fourier relativas a uma só coordenada (séries simples).

Na resolução do problema em estudo, tem-se em atenção as características de simetria apresentadas pela laje contínua (deformada com tangente horizontal no apoio intermédio) que permitem tratar cada tramo da laje total como uma laje apoiada em três bordos e encastrada no quarto (Fig. 2).

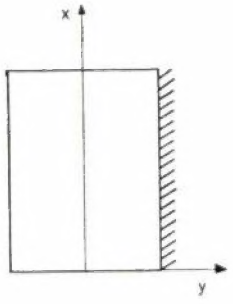


FIG. 2

O campo de deslocamentos numa laje rectangular simplesmente apoiada em três bordos e encastrada no quarto obtém-se pela sobreposição das seguintes soluções:

— A primeira em que se considera a laje simplesmente apoiada em todos os bordos, sujeita à distribuição de carga uniforme, tendo a deformada correspondente a expressão **[1]**:

$$W(x,y) = \frac{4\,P_o\,a^4}{\pi^5 D} \cdot \sum_{m\,1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^5} \left[1 - \frac{\alpha \,.\, tgh(\alpha) + 2}{2 \,.\, \cosh(\alpha)} \,.\, \cosh\left(\frac{2 \,.\, \alpha \,.\, y}{b}\right) + \frac{\alpha}{2 \,.\, \cosh(\alpha)} \cdot \frac{2y}{b} \,.\, \operatorname{senh}\left(\frac{2 \,.\, \alpha \,.\, y}{b}\right) \right] . \operatorname{sen}\left(\frac{m \,.\, \pi \,.\, x}{a}\right) \right\} \tag{1}$$

sendo: $D = \dfrac{E \,.\, h^3}{12\,(1 - V^2)}$ $\qquad \alpha = \dfrac{m \,.\, \pi \,.\, b}{2 \,.\, a}$

— A segunda em que se aplicam momentos no bordo a encastrar de modo a que a tangente da deformada nesse bordo seja simétrica da da primeira solução. Neste caso a deformada tem a seguinte expressão **[1]**:

$$W(x,y) = \frac{a^2}{4 \,.\, \pi^2 \,.\, D} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{E_m \,.\, \operatorname{sen}\left(\frac{m \,.\, \pi \,.\, x}{a}\right)}{m^2} : \left[\frac{1}{\cosh(\alpha)} \,.\, \left(\alpha \,.\, tgh(\alpha) \,.\, \cosh\left(\frac{m \,.\, \pi \,.\, y}{a}\right) - \left(\frac{m \,.\, \pi \,.\, y}{a}\right) . \operatorname{senh}\left(\frac{m \,.\, \pi \,.\, y}{a}\right)\right) + \frac{1}{\operatorname{senh}(\alpha)} \left(\alpha \,.\, cotgh(\alpha) \,.\, \operatorname{senh}\left(\frac{m \,.\, \pi \,.\, y}{a}\right) - \left(\frac{m \,.\, \pi \,.\, y}{a}\right) . \cosh\left(\frac{m \,.\, \pi \,.\, y}{a}\right)\right) \right] \right\} \tag{2}$$

em que o valor de E_m se obtém impondo à tangente ao longo do bordo a encastrar a condição referida.

Considerando a primeira solução, a tangente ao longo do **bordo** a encastrar toma a seguinte expressão:

$$\left(\frac{dW}{dy}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{2 \,.\, P_o \,.\, a^3}{\pi^4 \cdot D} \cdot \sum_{m\,1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^4} \,.\, \operatorname{sen}\left(\frac{m \,.\, \pi \,.\, x}{a}\right) . \left[\alpha - tgh(\alpha) \,.\, [1 + \alpha \,.\, tgh(\alpha)]\right] \right\} \tag{3}$$

Por outro lado para a segunda solução:

$$\left(\frac{dW}{dy}\right)_{y=\frac{b}{2}} = \frac{a}{4 . \pi . D} . \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} . \text{sen}\left(\frac{m . \pi . x}{a}\right) . E_m . (\alpha . \text{tgh}^2(\alpha) - \text{tgh}(\alpha) + \alpha . \text{cotgh}^2(\alpha) - \text{cotgh}(\alpha) - 2 . \alpha) \right\} \quad (4)$$

Igualando:

$$E_{m\,(m=1,3,5)} = \frac{8 . P_o . a^2}{\pi^3 . m^3} . \frac{\alpha - \text{tgh}(\alpha) . [1 + \alpha\, \text{tgh}(\alpha)]}{\alpha . \text{tgh}^2(\alpha) - \text{tgh}(\alpha) + \alpha . \text{cotgh}^2(\alpha) - \text{cotgh}(\alpha) - 2 . \alpha} \quad (5)$$

$$E_{m\,(m=2,4,6)} = 0 . 0$$

A equação da deformada final, dada pela sobreposição de (1) e (2), é:

$$W(x, y) = \frac{4 . P_o . a^4}{\pi^5 . D} . \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m^5} . \left[1 - \frac{\alpha . \text{tgh}(\alpha) + 2}{2 . \cosh(\alpha)} . \cosh\left(\frac{2 . \alpha . y}{b}\right) + \frac{\alpha}{2 . \cosh(\alpha)} . \frac{2y}{b} . \text{senh}\left(\frac{2 . \alpha . y}{b}\right) \right] . \right.$$

$$\left. . \text{sen}\left(\frac{m . \pi . x}{a}\right) \right\} + \frac{a^2}{4 . \pi^2 . D} . \sum_{m=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{E_m . \text{sen}\left(\frac{m . \pi . x}{a}\right)}{m^2} . \left[\frac{1}{\cosh(\alpha)} . (\alpha . \text{tgh}(\alpha) . \cosh\left(\frac{m . \pi . y}{a}\right) - \right.\right.$$

$$- \left(\frac{m . \pi . y}{a}\right) . \text{senh}\left(\frac{m . \pi . y}{a}\right)) + \frac{1}{\text{senh}(\alpha)} . (\alpha . \text{cotgh}(\alpha) . \text{sen}\left(\frac{m . \pi . y}{a}\right) -$$

$$\left.\left. - \left(\frac{m . \pi . y}{a}\right) . \cosh\left(\frac{m . \pi . y}{a}\right)) \right] \right\} \quad (6)$$

A partir da expressão da deformada estabelecem-se as expressões dos esforços e reacções. Note-se que o valor da reacção do apoio intermédio, obtido por este cálculo, é metade do valor real.

2.2 — Método de Navier

Neste método utilizam-se para expressão da deformada, séries duplas ee Fourier. Analogamente à utilização do método anterior divide-se a resolução do problema em duas soluções que se sobrepõem posteriormente de modo a obter o resultado final (Fig. 3).

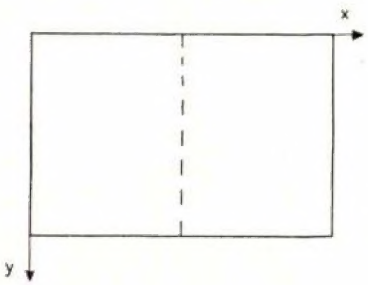


FIG. 3

Assim considera-se:

— Uma primeira solução em que se suprime o apoio intermédio da laje contínua, estudando-se a laje como simplesmente apoiada com distribuição uniforme de carga. A expressão da deformada é **[2]:**

$$W(x, y) = \frac{16 . P_o}{\pi^6 . D} . \sum_{m,n=1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m . n . \left(\frac{m^2}{4 b^2} + \frac{n^2}{a^2}\right)} . \text{sen}\left(\frac{m . \pi . x}{2 b}\right) . \text{sen}\left(\frac{m . \pi . y}{a}\right) \right\} \quad (7)$$

— Uma segunda solução em que se aplica na linha do apoio suprimido uma carga de faca que provoque uma deformada, ao longo dessa linha, simétrica da obtida na solução anterior. A carga de faca representa a reacção do apoio intermédio.

A deformada de uma laje rectangular simplesmente apoiada sujeita a uma carga genérica P (x, y) é dada por **[2]:**

$$W(x, y) = \frac{1}{\pi^4 . D} . \sum_{i,h=1}^{\infty} \left\{ \frac{P_{ih}}{\left(\frac{i^2}{4 b^2} + \frac{h^2}{a^2}\right)^2} . \text{sen}\left(\frac{i . \pi . x}{2 b}\right) . \text{sen}\left(\frac{h . \pi . y}{a}\right) \right\} \quad (8)$$

em que P_{ih} são constantes da série dupla de senos representativa da função de carga

$$P(x, y) = \sum_{i,h=1}^{\infty} \left\{ (P_{ih} \cdot \text{sen} \left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{2b} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{h \cdot \pi \cdot y}{2b} \right) \right. \tag{9}$$

em que

$$P_{ih} = \frac{4}{2ab} \int_0^a \int_0^{2b} P(x, y) \cdot \text{sen} \left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{2b} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{h \cdot \pi \cdot y}{a} \right) dx \cdot dy \,. \tag{10}$$

A função de carga actuante nesta solução, sendo uma carga de faca, é:

$$P(x, y) = \overset{(1)}{\delta}(x-b) \cdot P(y) \tag{11}$$

em que $P(y)$, representada por uma série simples de senos, assume a expressão:

$$P(y) = \sum_{s=1}^{\infty} P_s \cdot \text{sen} \left(\frac{s \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \,. \tag{12}$$

Assim, substituindo (12) e (11) em (10)

$$P_{ih} = \frac{1}{b} \cdot P_h \cdot \text{sen} \left(\frac{i \cdot \pi}{2} \right) \,. \tag{13}$$

e substituindo (13) em (8), vem a deformada

$$W(x, y) = \frac{1}{\pi^4 \cdot D} \cdot \sum_{i,h=1}^{\infty} \left\{ \frac{\frac{1}{b} \cdot P_h \cdot \text{sen} \left(\frac{i \cdot \pi}{2} \right)}{\left(\frac{i^2}{4b^2} + \frac{h^2}{a^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \left(\frac{i \cdot \pi \cdot y}{2b} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{h \cdot \pi \cdot x}{a} \right) \right\} \,. \tag{14}$$

O valor dos coeficientes P_h da carga de faca, obtêm-se igualando, a meio vão, a deformada devida à recção (14) com a devida à distribuição uniforme de carga (7):

$$P_h = \frac{16 \cdot P_o \cdot b}{2} \cdot \frac{\sum_{m\,1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m \cdot h \left(\frac{m^2}{4b^2} + \frac{h^2}{a^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \left(\frac{h \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{m \cdot \pi}{2} \right) \right\}}{\sum_{i\,1,3,5}^{\infty} \left\{ \frac{\text{sen}^2 \left(\frac{i \cdot \pi}{2} \right)}{\left(\frac{i^2}{4b^2} + \frac{h^2}{a^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \left(\frac{h \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \right\}} \tag{15}$$

---

(1) $\delta(\zeta)$ é a função de Dirac, definida no intervalo $]\zeta_0, \zeta_1[$ por

$$\begin{matrix} \delta(\zeta) = 0 & \zeta \neq 0 \\ \delta(\zeta) = \infty & \zeta = 0 \end{matrix} \quad , \text{ sendo } \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \delta(\zeta)\, d\zeta = 1.$$

Demonstra-se que **[2]**:

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \delta(\zeta - a) \cdot F(\zeta)\, d\zeta = F(a)$$

A expressão final da deformada é a resultante da sobreposição das expressões (15) e (7)

$$W(x,y) = \frac{16 \cdot P_o}{\pi^6 \cdot D} \cdot \sum_{\substack{m,n \\ 1,3,5}}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m \cdot n \cdot \left(\frac{m^2}{4\,b^2} + \frac{n^2}{a^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{2\,b} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{n \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \right\} -$$

$$- \frac{1}{\pi^4 \cdot D \cdot b} \cdot \sum_{\substack{i,h \\ 1,3,5}}^{\infty} \left\{ \frac{P_h \cdot \text{sen} \left(\frac{i \cdot \pi}{2} \right)}{\left(\frac{i^2}{4\,b^2} + \frac{h^2}{a^2} \right)^2} \cdot \text{sen} \left(\frac{i \cdot \pi \cdot x}{2\,b} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{h \cdot \pi \cdot y}{a} \right) \right\} \qquad (16)$$

Após a obtenção da deformada e analogamente ao método anterior, obtêm-se as expressões dos esforços e reacções.

3 — MÉTODOS NUMÉRICOS

3.1 — Método dos elementos finitos

O cálculo dos deslocamentos e dos esforços pelo método dos elementos finitos fez-se utilizando um programa de cálculo automático que determina aqueles valores em pontos do interior e da fronteira de lajes vigadas, ortótropas, de espessura variável e contorno poligonal **[3]**.

Neste caso o domínio da análise subdivide-se em elementos finitos rectangulares (0,25 m × 0,25 m) de quatro nós um em cada vértice do rectângulo. Considera-se para cada nó três possíveis graus de liberdade: deslocamento perpendicular ao plano xy (plano de elemento), rotação em torno de x e rotação em torno de y. A função deslocamento utilizada é o polinómio do 4.º grau incompleto

$$W = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} xy^3 + \alpha_{12} x^3 y \qquad (17)$$

que permite estabelecer uma relação biunívoca entre as doze constantes do polinómio e os doze graus de liberdade do elemento. A partir desta relação é possível determinar a matriz de rigidez do elemento, referida aos doze deslocamentos nodais considerados e processar a análise da estrutura utilizando o método dos deslocamentos.

O programa de cálculo utilizado fornece os deslocamentos nodais para cada hipótese de solicitação e os momentos-tensões (M_{11}, M_{22}, M_{12}) no centro de gravidade de cada elemento.

3.2 — Método das diferenças finitas

Aplica-se ao problema em estudo a técnica numérica das diferenças finitas na resolução da equação diferencial de Lagrange

$$\nabla^4 W = P_o/D$$

obtendo-se um sistema de equações lineares da forma:

$$[A] \cdot [W] = [B] \qquad (19)$$

[A] — matriz de constantes
[W] — matriz de deslocamentos (incógnitas)
[B] — matriz de termos constantes.

Cada equação resulta do estabelecimento, em termos de diferenças finitas, da equação de Lagrange (18) para cada um dos nós internos duma malha em que se divide a laje (0,50 m × 0,50 m, neste caso), utilizando-se na derivação numérica o processo que permite obter o mínimo erro para a malha considerada **[2]**.

Conhecidos os valores dos deslocamentos nos vários nós [resolução de (19)], pode-se conhecer o valor dos esforços internos da laje em todos os nós da malha, através das equações de relacionação com as derivadas dos deslocamentos.

4 — MÉTODOS BASEADOS EM ANALOGIAS FÍSICAS

4.1 — Método das faixas

Este método consiste na divivsão da laje em diversas faixas que se procura terem um comportamento estruturaltural análogo **[4]**. Para que o equilíbrio seja satisfeito em todos os pontos, impõe-se um campo de momentos que verifique a equação:

$$\frac{d^2 M_{11}}{dx^2} + \frac{d^2 M_{22}}{dy^2} - \frac{2\,dM_{12}}{dx\,dy} = -P_o \qquad (20)$$

Como para cada laje e carregamento há uma infinidade de campos de momentos verificando (20), e como a existência de momentos torsores torna difícil a análise da relação carga-momentos, considera-se $M_{12} = 0$, ficando

$$\frac{d^2 M_{11}}{dx^2} + \frac{d^2 M_{22}}{dy^2} = -P_o \tag{21}$$

em que P_o é pontualmente distribudo por duas faixas segundo x e y de acordo com um parâmetro β:

$$\frac{d^2 M_{11}}{dx^2} = -\beta(x, y) \cdot P_o \qquad \frac{d^2 M_{22}}{dy^2} = -[1 - \beta(x, y)] \cdot P_o$$

Para a determinação do $\beta(x, y)$ existem diversas variantes, tendo-se utilizado o método de Grashof em que $\beta(x, y)$ é constante em todo o domínio, sendo determinado pela compatibilização do deslocamento no ponto de intersecção de duas faixas ortogonais em que se divide a laje. No caso em estudo compatibiliza-se o deslocamento a meio vão de uma viga simplesmente apoiada com outra apoiada-encastrada.

Calculam-se também os valores afectados da correcção empírica de Marcus.

4.2 — O Método das grelhas

No métodos das grelhas divide-se a laje em dois sistemas de vigas perpendiculares, de secção constante, sujeitas à carga da sua zona de influência e com características geométricas correspondentes ; dos elementos de laje por elas substituídos. Considera-se em cada direcção a rigidez à flexão e à torção das vigas correspondentes, em vez da rigidez à flexão da laje. O cálculo dos deslocamentos e dos esforços por este método faz-se utilizando um programa de cálculo automático que determina aqueles valores nos nós da grelha bem como na fronteira **[3]**. Repare-se que embora apresentando certas analogias com o método anterior, é no entanto diferente. Note-se que os únicos deslocamento considerados são: o deslocamento perpendicular ao plano da laje e as rotações em torno de dois eixos perpendiculares contidos no plano da estrutura.

4.3 — Tabelas

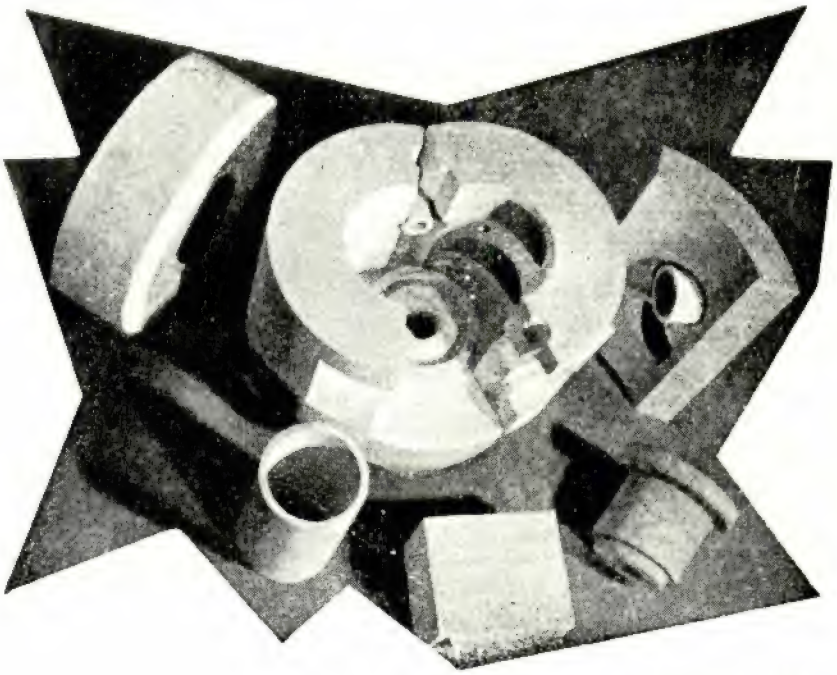
Utilizam-se para comparação os valores das tabelas do American Concrete Institute **[5]** e os das de Barés **[6]**.

QUADRO 1

	MÉTODO DE NAVIER	MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS	MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS	MÉTODO DAS GRELHAS	MÉTODO DE GRASHOF	MÉTODO DE MARCUS	MÉTODO DO A. C. I.	TABELAS DE BARÉS
Deslocamentos em x=1.50 ; y=2.00	— 0.57 %	— 4.00 %	4.00 %	— 5.50 %	— 32.00 %	— 60.00 %	130.00 %	— 4.00 %
M_{11} em x=1.50 ; y=2.00	0.10 %	— 1.80 %	1.00 %	— 4.76 %	— 31.00 %		— 25.50 %	0.20 %
M_{11} em x=3.00 ; y=2.00	— 14.94 %		— 9.80 %	— 7.56 %				— 0.10 %
M_{11} em x=1.50 ; y=1.00	0.12 %	— 4.80 %	1.20 %	— 7.70 %				
M_{11} em x=3.00 ; y=1.00	16.40 %		13.00 %	— 6.80 %				
M_{22} em x=1.50 ; y=2.00	— 0.10 %	3.40 %	6.80 %		260.00 %	83 00 %	69.00 %	0.40 %
M_{22} em x=3.00 ; y=2.00	— 15.06 %	2.60 %	— 9.50 %					
M_{12} em x=2.50 ; y=0.00	— 0.13 %	— 4.60 %	— 12.80 %					0.30 %
M_{12} em x=0.00 ; y=0.00	— 0.27 %	2.00 %	— 12.80 %					
T_1 em x=3.00 ; y=2.00				0.47 %				0.20 %
T_1 em x=0.00 ; y=2.00	1.30 %							0.30 %
T_2 em x=3.00 ; y=0.00								4.80 %
R_1 em x=0.00 ; y=2.00								0.20 %
R_2 em x=3.00 ; y=0.00								4.00 %

a técnica moderna emprega

BETÕES REFRACTÁRIOS



à base dos cimentos

FONDU LAFARGE

e

SECAR 250

porque são

práticos
eficientes
económicos

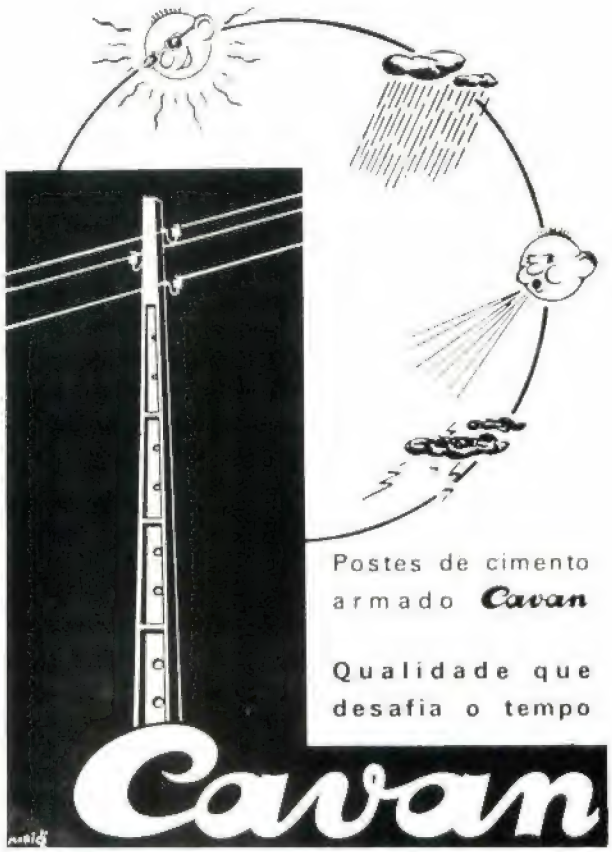
REFRACTÁRIOS ATÉ 1800° C

REFRACTÁRIOS ISOLANTES ATÉ 1700° C

Os nossos serviços técnicos, especializados, estão à vossa inteira disposição para estudar, sem qualquer encargo da vossa parte, a adaptação dos BETÕES REFRACTÁRIOS a todos os vossos problemas

AGUIAR & MELLO L.DA

P. do Município, 13-1.º — LISBOA — Tel. 32 11 51/2



Av. Visconde Valmor, 76-1.º - Tel. 766014 (7 linhas) Lisboa-1

ESPECIALISTA DESDE 1947

sopecate

ESTUDOS
GEOTÉCNICOS

FUNDAÇÕES
ESPECIAIS

RUA DO ARSENAL, 146-2º
TELFS 320208 · 360437 · 364010
LISBOA

Ventilação
de Edifícios
Ventilação Térmica
FÉRIA
(tipo shunt)

JÁ À VENDA

M. de ABREU FARO

PROPAGAÇÃO E RADIAÇÃO DE
ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

2 RADIAÇÃO

PREÇO: 560$00

DESCONTO:
10 % aos Assinantes

PEDIDOS À TÉCNICA

5 — ANÁLISE DOS RESULTADOS

Calculados os valores dos deslocamentos, esforços e reacções pelos métodos atrás referidos, pode-se efectuar uma comparação entre os resultados obtidos. Numa primeira observação os valores surgem bastante semelhantes pelo que se opta pela utilização dum critério de comparação em que se calculam os erros relativos dos diversos resultados em relação aos resultados dum método considerado padrão.

A escolha do método padrão é feita entre os métodos analíticos, dado o seu carácter mais rigoroso, e dentre estes métodos escolheu-se o de Maurice Levy como método padrão, dada a rapidez de convergência que apresentam os seus resultados em relação ao método de Navier (Fig. 4).

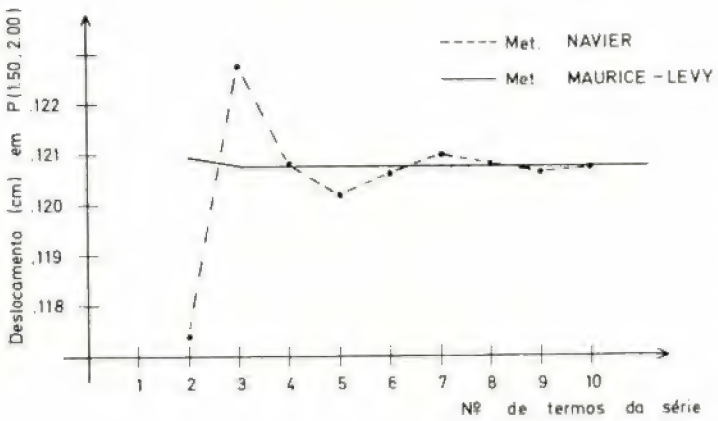


FIG. 4

No quadro 1 apresentam-se os erros relativos, referentes aos valores mais característicos dos resultados, calculados por todos os métodos.

O método de Navier conduz a erros insignificantes, de truncatura no que diz respeito a valores de desolcamentos e de esforços nos pontos afastados do apoio central. Já no que diz respeito a valores e esforços nesta zona, os erros obtidos são da ordem dos 15 %, para os momentos, o que evidencia a fraca convergência da série, resultante do efeito da carga de faca (descontinuidade da 1.ª derivada dos momentos). Também para o esforço transverso e reacções no apoio intermédio, os valores só se podem obter por extrapolação pois devido à descontinuidade dos diagramas e às propriedades das séries de Fourier, os valores calculados são nulos.

Os métodos numéricos apresentam também valores razoáveis, embora com erros superiores aos do método anterior. No método dos elementos finitos, no que respeita aos deslocamentos, os erros não ultrapassam os 5 %, o mesmo se verificando para os vaolres dos momentos. No método das diferenças finitas os erros dos valores dos deslocamentos são também de cerca de 5 %, oscilando os erros dos valores dos momentos entre 1 % e 13 %, sendo mais significativos nas zonas dos apoios.

Quanto aos métodos baseados em analogias físicas, os valores obtidos são praticamente inaceitáveis à excepção dos do método das grelhas que apresentam erros por defeito entre 4 % e 8 %, quer para os valores dos deslocamentos, quer para os dos momentos. Na realidade constatam-se erros que chegam a atingir os 600 % (com maior relevância para os valores dos momentos), e se em alguns casos são por excesso, outros há em que são por defeito, o que leva a concluir da falta de segurança a que estes métodos podem conduzir. O método de Marcus e o de Grashof conduzem a valores por defeito dos M_{11}, com evidência para o método de Marcus, e a valores por excesso para M_{22} com evidência para o método de Grashof. Analogamente as tabelas do American Concrete Institute conduzem a uma grande segurança, à excepção dos M_{11} no apoio central. Com características diferentes apresentam-se os erros obtidos pelo uso das tabelas de Barés, o que leva a supor terem estas sido feitas através do método de Maurice-Levy.

BIBLIOGRAFIA

[1] — **TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S.** — *Théorie des plaques et coques*, Paris, Librarie Polyt. Ch. Béranger, 1961.

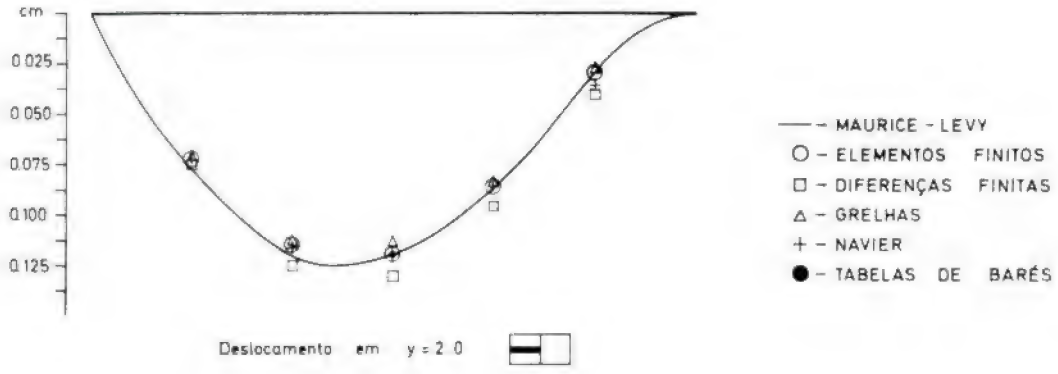
[2] — **OLIVEIRA, E. R. A.; REIS, A. J.** — *Folhas de elasticidade aplicada*, Lisboa, Ed. da AEIST, 1974.

[3] — **FARIA, A.; FRANÇA, V.; BAPTISTA, C.** — *Manual do utilizador dos programas de cálculo automático de estruturas*, Lisboa, Ed. do LNEC, 1976.

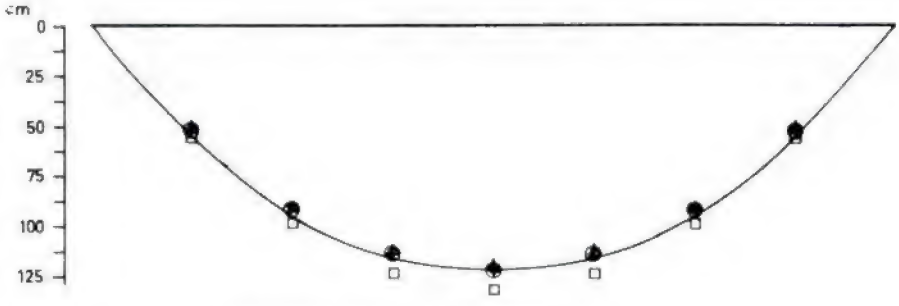
[4] — **GHALI, A.; NEVILLE, A. M.** — *Structural Analysis*, Scraton, IEP.

[5] — **LIMA, J. A.; COELHO, A. T.; MONTEIRO, V.** — *Manual de Betão Armado*, Lisboa, Ed. do LNEC, 1973.

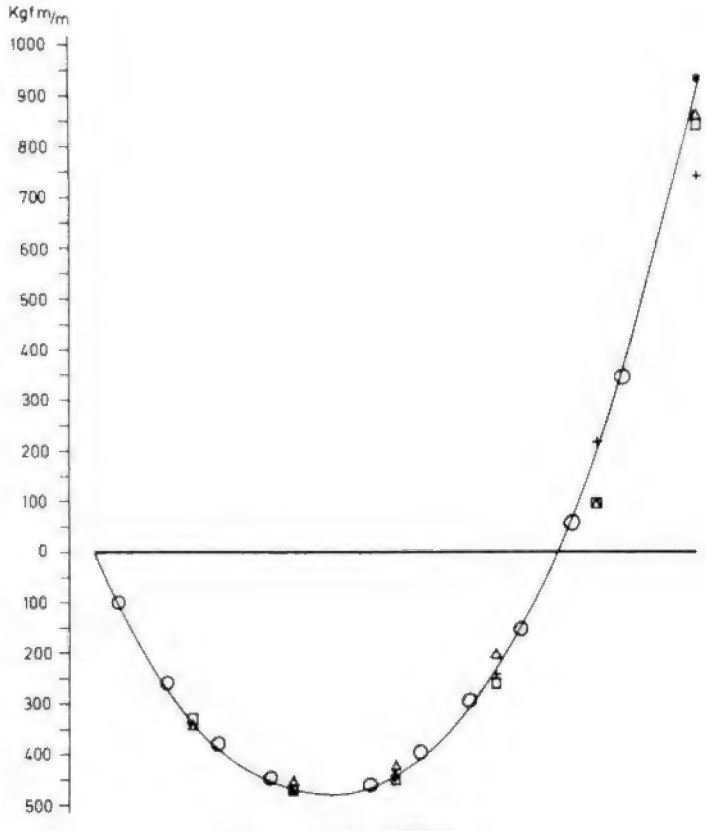
[6] — **BARÉS, R.** — *Tables pour le calcul des dalles et des parois*, Paris, Dunod, 1969.



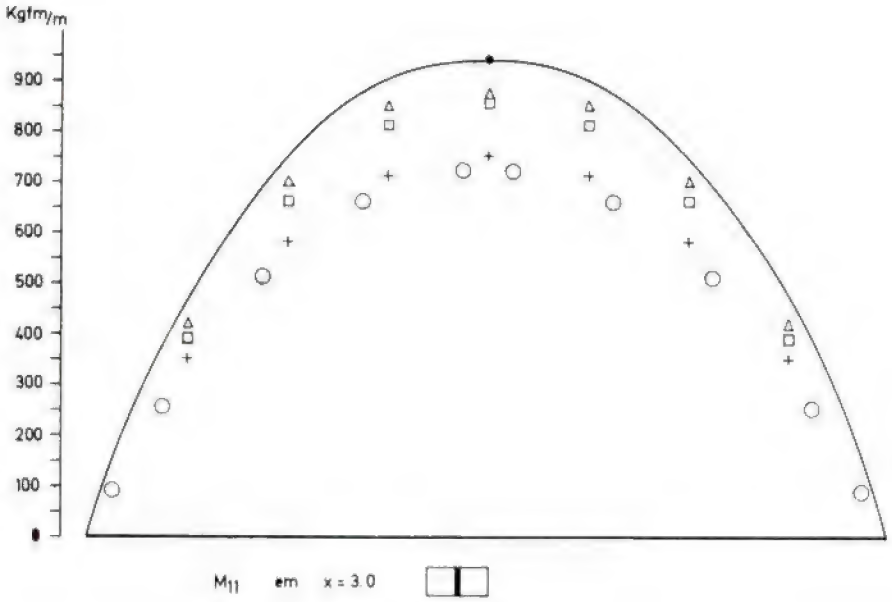
Deslocamento em y = 2.0

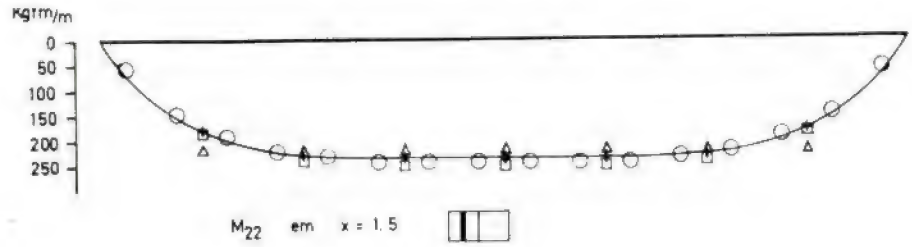


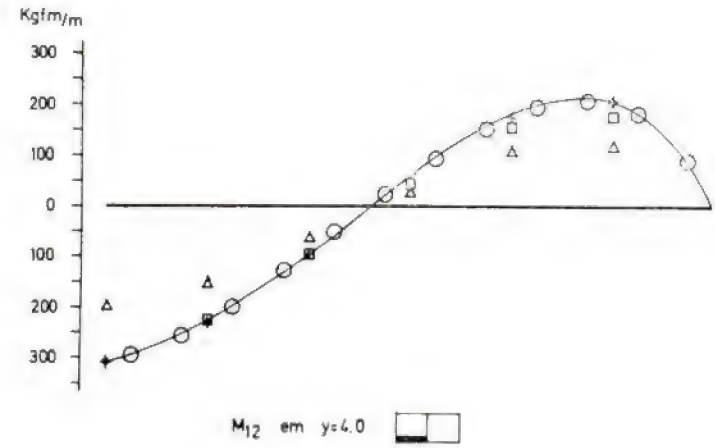
Deslocamento em x = 1.5

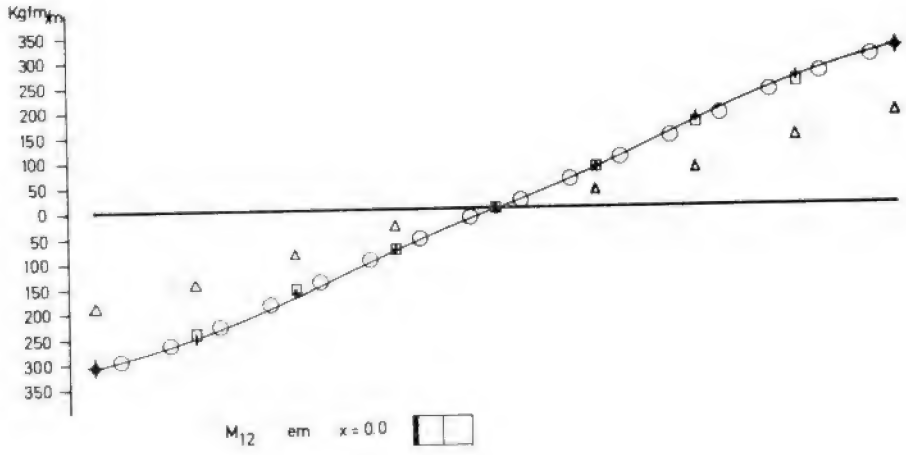


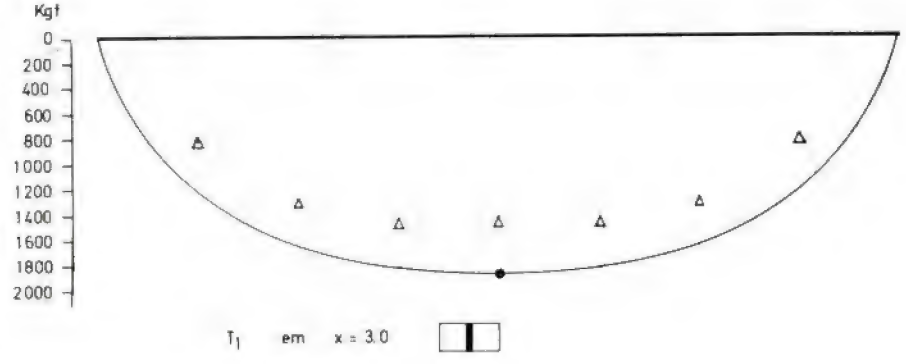
M_{11} em y = 2.0

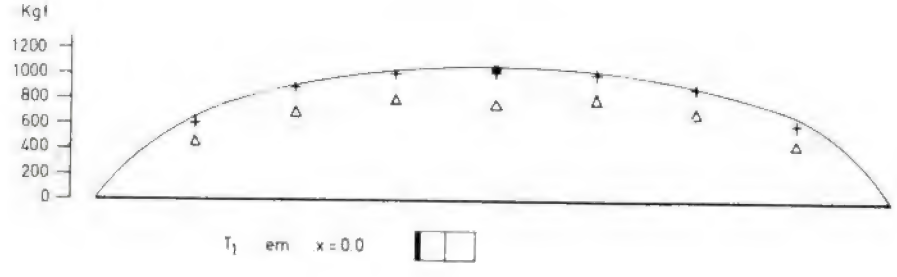

Kgfm/m
900
800
700
600
500
400
300
200
100
0
M_{11} em x = 3.0

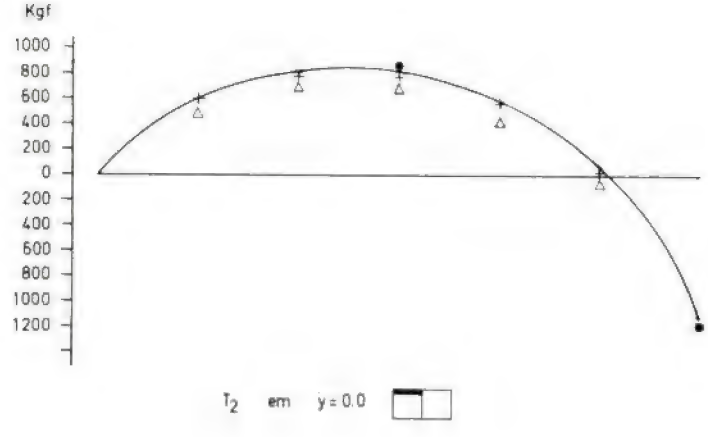

Kgfm/m
0
50
100
150
200
250
M_{22} em x = 1.5

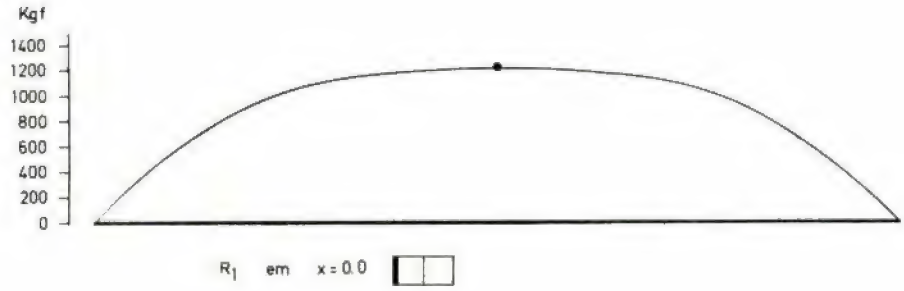

Kgfm/m
300
200
100
0
100
200
300
M_{12} em y=4.0

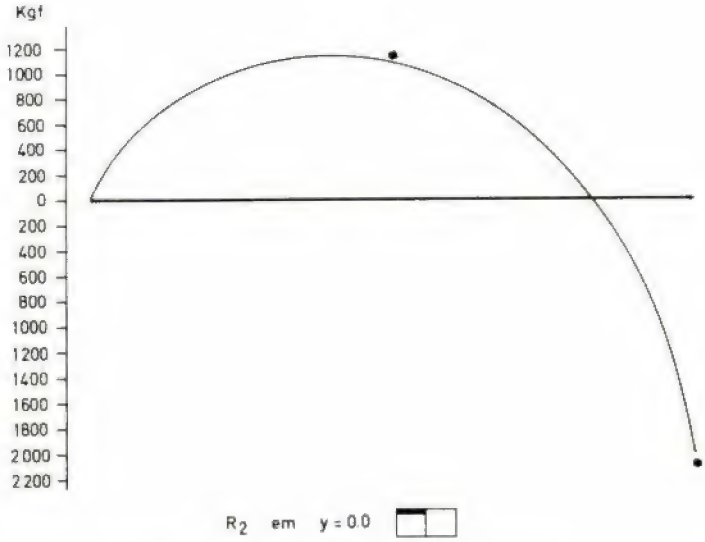

Kgfm
350
300
250
200
150
100
50
0
50
100
150
200
250
300
350
M_{12} em x = 0.0


Kgf
0
200
400
600
800
1000
1200
1400
1600
1800
2000
T_1 em x = 3.0


Kgf
1200
1000
800
600
400
200
0
T_1 em x = 0.0


Kgf
1000
800
600
400
200
0
200
400
600
800
1000
1200
T_2 em y = 0.0





NOTICIÁRIO

Tem estado a decorrer no presente ano lectivo o 1.º ciclo de cursos sobre Gestão de Sistemas de Transportes, organizado pelo CESUR (I. S. T.). Do ciclo fazem parte cursos sobre:

1) Redes de Transportes;

2) Material Circulante;

3) Análise de Projectos.

Os dois primeiros cursos decorreram nos meses de Novembro de 1979 e Março de 1980 com elevada afluência de participantes ligados aos mais variados sectores. O terceiro curso realiza-se de 11 a 24 de Junho de 1980. Para mais informações contactar Eng.º José Manuel Viegas — CESUR — I. S. T. (Tel. 88 29 92).

* * *

6.º Congresso Nacional de Fundição — de 22 a 24 de Outubro de 1980, nas instalações do Clube Residencial da Boavista, no Porto.

4.ª Exposição Nacional de Fundição — de 17 a 26 de Outubro de 1980, no Palácio de Cristal e integrada na Exposição da Metalomecânica, que terá lugar na mesma data.

ASSOCIAÇÃO PORTUGUESA DE FUNDIÇÃO — Secretariado e Laboratório: Rua do Campo Alegre, 672-2.º Esq.º 4100 Porto — Telef. 69 06 75.

58.ª FEIRA DE MILÃO — 14-23 de Abril 1980

A Feira de Milão é o mercado internacional que trabalha durante todo o ano com mais de 50 feiras especializadas.

A dinâmica da Feira de Milão pode-se documentar em cifras que não têm necessidade de comentários. No último ciclo anual: mais de 37 000 expositores de 90 Paises ocuparam uma área expositiva de 2 705 622 m²; 80 Nações participaram oficialmente com próprios escritórios de informações e com exposição de produtos.

No Centro Internacional de Intercâmbio e Encontros (CISI) pode-se utilizar os serviços do Salão do Comércio Exterior (SAL.CO.EST.) que dispõe, entre outros, de um Grupo de Assistência Operativa e de um serviço, ligado com a Central Computer CISI, que fornece em poucos segundos informações sobre a procura de expositores e dos produtos quer da Feira de Abril quer das feiras especializadas, como também os nominativos de quem oferece ou procura representações, em base às comunicações feitas pelos expositores ou pelos operadores económicos.

Para ulteriores informações dirija-se ao:

E. A. Fiera Milano, Largo Domodossola 1, 20145 Milano (Itália), Telex 331360 EAFMI,
e às Representações diplomáticas, consulares e comerciais da Itália no estrangeiro.

(Informação do «Expresso», de 1-3-80)

* * *

Presidência do Conselho
Junta Nacional de Investigação Cientifica e Tecnológica

PROGRAMA DE CONTRATOS DE INVESTIGAÇÃO E DESENVOLVIMENTO

1. Nos termos da alinea h) do art.º 2 e alínea e) do art.º 3.º do D. L. n.º 47 791 de 11 de Julho de 1967, a Junta Nacional de Investigação Cientifica e Tecnológica (JNICT) celebra contratos de investigação que promovam uma maior ligação da I & D (investigação e desenvolvimento) com os objectivos e prioridades do desenvolvimento económico e social. Tendo em conta este principio orientador serão financiados preferencialmente projectos que se encontrem inseridos nas seguintes grandes áreas:

— Exploração e aproveitamento do meio natural, nomeadamente recursos oceânicos.
— Aproveitamento dos recursos energéticos, nomeadamente desenvolvimento de fontes de energia alternativas e racionalização do uso da energia.
— Desenvolvimento agro-industrial.
— Promoção da produtividade e da tecnologia industriais.
— Protecção e promoção da saúde humana, nomeadamente higiene alimentar e nutrição.
— Investigação urbana e regional.
— Fomento de tecnologia avançadas.

2. Os contratos serão financiados em regime de comparticipação, devendo os projectos de I&D realizar-se em Instituições e Laboratórios do Estado, Centros ligados ao Ensino Superior, Empresas ou Instituições Privadas sem fins lucrativos.

O grau de comparticipação variará consoante a natureza das propostas submetidas, não sendo suportadas pela JNICT despesas gerais de funcionamento.

3. A fim de submeterem projectos de I&D que possam vir a ser objecto de contrato com a JNICT, deverão os interessados solicitar para:

JUNTA NACIONAL DE INVESTIGAÇÃO CIENTÍFICA E TECNOLÓGICA
Av. D. Carlos I, 126-2.º — 1200 LISBOA

os formulários e manual para elaboração das propostas.

4. Só serão aceites propostas de contrato que respeitem as normas estabelecidas pela JNICT.

5. O prazo para recepção das propostas de contrato termina impreterivelmente no dia 30 de Abril.

(Informação do «Expresso», de 15-3-80)

(Continuação da pág. 212)

Evolutas das Cónicas
Estudo das suas principais características (*)

F. PERES-RODRIGUES
Investigador do LNEC

SUMÁRIO

Determinam-se, a partir das equações focais dos três géneros de cónicas, as correspondentes evolutas, estudando-se em seguida algumas das suas principais propriedades métricas e não métricas.

SUMMARY

From the focal equations of the three types of conics the corresponding evolutes are obtained. Thereafter, some of the main metric and non-metric properties of the evolutes are studied.

1 — INTRODUÇÃO

A evoluta de uma curva é, por definição, o lugar geométrico dos centros de curvatura ou a envolvente das normais a todos os pontos dessa curva.

Por facilidade de cálculo vão estudar-se separadamente as equações das evolutas de cada um dos três géneros de cónicas.

Em relação às cónicas centradas, elipses e hipérboles, o estudo será feito em relação a um sistema de eixos coordenados coincidente com os eixos das cónicas. Para a parábola o sistema de eixos será tal que o eixo OX seja o eixo transverso e o eixo OY a tangente à parábola no vértice.

Utilizar-se-ão para todas as cónicas as suas equações focais *.

Deduzidas as equações paramétricas e cartesianas das evolutas, determinar-se-ão algumas das suas principais propriedades, tendo em atenção o parâmetro excentricidade para as cónicas centradas.

Os sistemas de coordenadas utilizados, são aqueles que tornam as operações de cálculo e as expressões mais simples, sem perda de análise das propriedades intrínsecas estudadas, dado serem estas independentes dos referenciais.

2 — EVOLUTA DA ELIPSE

2.1 — Equações paramétrica e caratesiana

Seja:

$$f(x,y)=(1-\varepsilon^2)x^2+y^2-p^2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)=0 \qquad (1)$$

a equação focal de uma elipse, de excentricidade ε e directrizes r e r' paralelas ao eixo OY e à distância p, em relação aos seus eixos.

A equação (1) poderá ser escrita pondo em evidência os semi-eixos da elipse:

$$\frac{x^2}{[p\varepsilon]^2}+\frac{y^2}{[p\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}]^2}=1 \qquad (2)$$

As equações paramétricas da elipse, tendo como parâmetro o ângulo indicado na fig. 1, podem ser escritas, em face de (1) ou (2), por

$$\begin{cases} x=p\varepsilon\cos\varphi \\ y=p\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\mathrm{sen}\varphi \end{cases} \qquad (3)$$

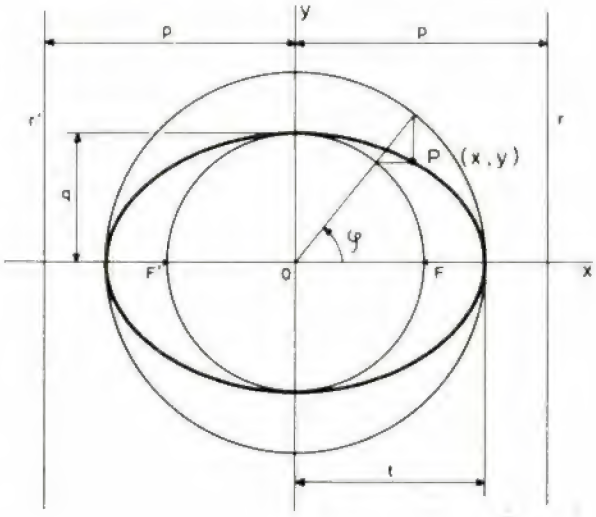


FIG. 1

Manuscrito recebido para publicação em 28/3/77.

* — Ver: CÓNICAS — estudo das principais características a partir da sua equação focal. TÉCNICA 439 1977.

Das equações (2) e (3) podem escrever os valores dos semi-eixos maior e menor da elipse:

$$t=p \quad ; \quad q=p\varepsilon \sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{4}$$

pelo que a correspondente semi-distância focal f, será dada por:

$$f=\sqrt{t^2-q^2}=p\ \varepsilon^2 \tag{5}$$

A normal num ponto genérico P (X,Y) da elipse, é dada pela equação diferencial:

$$(X-x)\frac{\partial f}{\partial Y}=(y-y)\frac{\partial f}{\partial X} \tag{6}$$

a qual, tendo em atenção (1) e (3), pode tomar a forma paramétrica:

$$F(x,y,\varphi)=x\ \text{sen}\varphi-\sqrt{1-\varepsilon^2}\ y\ \cos\varphi-p\varepsilon^2\ \text{sen}\varphi\ \cos\varphi=0 \tag{7}$$

A definição paramétrica da evoluta é dada pelo sistema de equações:

$$\begin{cases} F(x,y,\varphi)=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \varphi}=0 \end{cases} \tag{8}$$

o qual, atendendo a (7), se pode escrever:

$$\begin{cases} x\ \text{sen}\theta-\sqrt{1-\varepsilon^2}\ y\ \cos\theta-p\varepsilon^2\ \text{sen}\theta\ \cos\theta=0 \\ x\ \cos\theta+\sqrt{1-\varepsilon^2}\ y\ \text{sen}\theta-p\varepsilon^2\ \cos\ 2\theta=0 \end{cases} \tag{9}$$

ou, numa forma paramétrica mais simples, por conveniente transformação de (9), atendendo a (4) e (5):

$$\begin{cases} x=p\varepsilon^3\ \cos^3\theta=\dfrac{f^2}{t}\ \cos^3\ \theta \\ y=-\dfrac{p\ \varepsilon^3}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ \text{sen}^3\ \theta=-\dfrac{f^2}{q}\ \text{sen}^3\ \theta \end{cases} \tag{10}$$

A igualdade de coordenadas em (3) e (10) não implica necessariamente a igualdade dos parâmetros φ e θ, da a razão da sua diferenciação.

A eliminação do parâmetro θ em (10) conduz à equação cartesiana da evoluta, que assume o aspecto:

$$x^{\frac{2}{3}}+\left[\sqrt{1-\varepsilon^2}\ y\right]^{\frac{2}{3}}=p^{\frac{2}{3}}\ \varepsilon^2 \tag{11}$$

ou, pondo em evidência os semi-eixos e a semi-distância focal, o aspecto:

$$[tx]^{\frac{2}{3}}+[qy]^{\frac{2}{3}}=f^{\frac{4}{3}} \tag{12}$$

2.2 — Principais caracteristicas não métricas

Com base nas equações paramétricas (10) ou nas equações cartesianas (11) ou (12), traçou-se na fig. 2 a evoluta de uma elipse

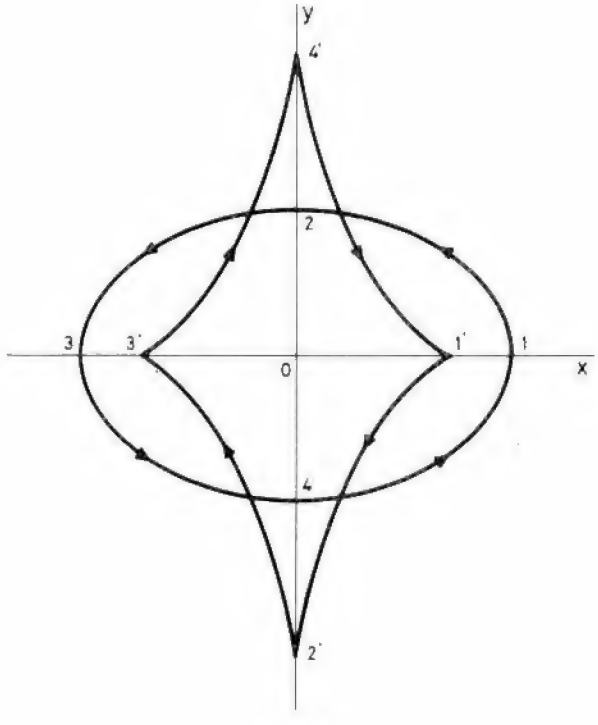


FIG. 2

A análise da fig. 2 permite, conjuntamente com as equações referidas, enunciar algumas características não métricas da evoluta:

a) é uma curva fechada e simétrica em relação ao centro da elipse, que por isso também é seu centro;

b) admite dois eixos coincidentes com os eixos da elipse, correspondendo o semi-eixo maior da evoluta ao semi-eixo menor da elipse e vice-versa;

c) possui 4 vértices que são pontos de reversão de 1.ª espécie ou ceratoides, correspondentes às intercepções com os eixos da elipse;

d) intercepta a elipse em 4 pontos, reais e distintos para $f>q$ ($\varepsilon>\sqrt{2}/2$, reais e coincidentes dois a dois para $f=q$ ($\varepsilon=\sqrt{2}/2$), e imaginárias para $f<q$ ($\varepsilon<\sqrt{2}/2$);

e) degenera no centro para o caso particular da circunferência;

MAGUE

"Caldeira n.º 1 da Central Térmica de Setúbal (Licença Foster Wheeler Corp.) em serviço desde 1979".

PONTES ROLANTES, GUINDASTES E APAR. DE ELEVAÇÃO ESPECIAIS	*Projecto e fabrico*
TURBINAS HIDRÁULICAS	*Fabrico segundo licença de A. C. M. de Vevey, S. A.*
TURBINAS A VAPOR	*Fabrico segundo licença de Brown Boveri, Cie.*
CALDEIRAS A VAPOR	*Projecto e fabrico segundo licença de Foster Wheeler, Co.*
EQUIPAMENTOS E INSTALAÇÕES INDUSTRIAIS	

CONSTRUÇÕES METALOMECANICAS **MAGUE** S.A.R.L.

ALVERCA DO RIBATEJO — PORTUGAL

MONCORVO
fonte de trabalho

O Nordeste também é rico.
E vai beneficiar directamente da sua riqueza.
O ferro de Moncorvo é força de trabalho.
A extracção do minério vai criar
novas oportunidades na região. Mais empregos.
Maiores rendimentos. Melhores condições de vida.
A FERROMINAS quer transformar
o minério de Moncorvo numa fonte de riqueza
e de progresso. Para o Nordeste. Para o País.

FERROMINAS.EP

f) degenera num segmento de recta para o caso da elipse degenerar no seu eixo maior.

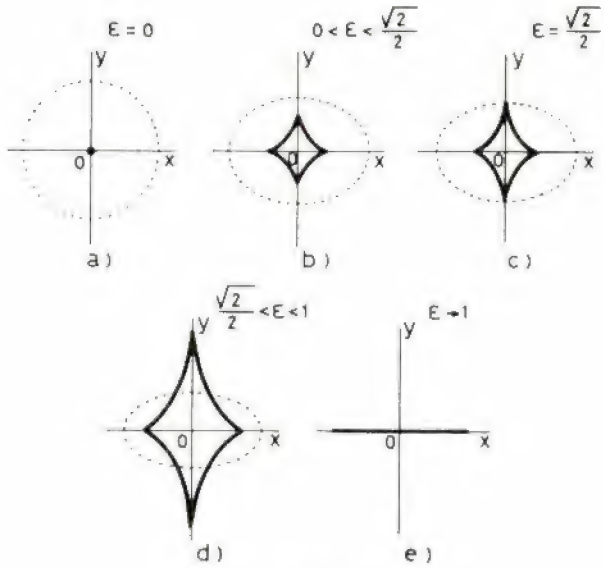


FIG. 3

g) é uma curva unicursal, isto é, as suas coordenadas podem ser expressas por funções racionais de um único parâmetro, pois que, se se fizer a mudança de variável:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=u \tag{13}$$

as expressões (10) tomam a forma:

$$\begin{cases} x=p\,\varepsilon^3\left[\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right]^3=\dfrac{f^2}{t}\left[\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right]^3 \\[2ex] y=-\dfrac{p\,\varepsilon^3}{1-\varepsilon^2}\left[\dfrac{2u}{1+u^2}\right]^3=-\dfrac{f^2}{q}\left[\dfrac{2u}{1+u^2}\right]^3 \end{cases} \tag{14}$$

h) a correspondência biunívoca entre os pontos da elipse e da sua evoluta é tal que partindo do ponto 1 da elipse (ver fig. 2) e caminhando no sentido positivo, os pontos correspondentes da evoluta partem de 1' e caminham no sentido negativo, comparar as expressões (3) e (10).

2.3 — Principais características métricas

Apresentam-se a seguir, com base nas equações de definição da evoluta (10), (11), (12) e (14), algumas características métricas, consideradas como as principais:

a) o semi-eixo menor ou transverso, t_e, existente no eixo OX, tem por valor

$$t_e=\frac{f^2}{t}=p\,\varepsilon^3 \tag{15}$$

e resulta de fazer $\theta=o$ na 1.ª expressão (10), $y=o$ nas 1.as expressões (11) e (12) ou ainda $t=0$ na 1.ª expressão (14). O seu valor dado por (15) varia desde zero (fig. 3-a), para o caso da circunferência, isto é, $\varepsilon=0$ ou $t=q$, até f, caso da elipse degenerar no seu eixo maior (fig. 3-e), isto é, no caso limite de ε tender para a unidade o que equivale a considerar q nulo ou $t=f=p$; assim, o semi-eixo menor da evoluta é sempre interior à elipse e menor ou igual à semi-distância focal desta;

b) o semi-eixo maior ou conjugado, q_e, existente no eixo OY, tem por valor:

$$q_e=\frac{f^2}{q}=\frac{p\,\varepsilon^3}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \tag{16}$$

e resulta de fazer $\theta=\frac{3\pi}{2}$ na 2.ª expressão (10), $x=0$ nas 2.as expressões (12) e (13), ou ainda $t=-1$ na 2.ª expressão (14). O seu valor dado por (16) varia desde zero (fig. 3-a), para o caso da circunferência, passando por q em que coincide com o semi-eixo menor da elipse de excentricidade $\sqrt{2}/2$ (fig. 3-c), até ao valor limite de infinito, caso da elipse degenerar no seu eixo maior (fig. 3-e). Assim, o semi-eixo maior da evoluta é interior à elipse para valores de excentricidade compreendidos entre 0 e $\sqrt{2}/2$ (fig. 3-b), coincidindo para este valor com o semi-eixo menor da elipse (fig. 3-c), e é exterior a esta para valores de excentricidade superiores a $\sqrt{2}/2$ (fig. 3-d);

c) a evoluta e a elipse têm de comum 4 pontos, cujas coordenadas se podem obter como se segue.

Igualando as coordenadas homólogas da elipse (3) e da evoluta (10) resulta:

$$\operatorname{sen}\varphi=\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\operatorname{sen}^3\theta \quad ; \quad \cos\varphi=\varepsilon^2\cos^3\theta \tag{17}$$

quadrando e somando, vem:

$$\varepsilon^4\cos^6\theta+\frac{\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}\operatorname{sen}^6\theta=1 \tag{18}$$

passando para potências de $\cos\theta$ e desembaraçando de denominadores, tem-se:

$$\begin{aligned}&\varepsilon^6(2-\varepsilon^2)\cos^6\theta-3\varepsilon^4\cos^4\theta+\\&\quad+3\varepsilon^4\cos^2\theta+(1-2\,\varepsilon^2)=0\end{aligned} \tag{19}$$

resolvendo esta equação cúbica em $\cos^2\theta$, verifica-se ter três raizes reais, das quais duas iguais:

$$\cos^2\theta_1=\frac{2\,\varepsilon^2-1}{\varepsilon^2\,(2-\varepsilon^2)}\,; \qquad \cos^2\theta_2=\cos^2\theta_3=\frac{1}{\varepsilon^2} \tag{20}$$

as duas raízes iguais não interessam por conduzirem a valores de $\cos\theta$ superiores à unidade; portanto, atendendo a (10) resulta, da 1.ª raiz:

$$x = \pm p\left[\frac{2\varepsilon^2-1}{2-\varepsilon^2}\right]^{\frac{3}{2}} ; \; y = \pm p(1-\varepsilon^2)\left[\frac{1+\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2}\right]^{\frac{3}{2}} \tag{21}$$

As coordenadas dos quatro pontos, simétricos dois a dois em relação à origem e aos eixos coordenados, obtêm-se pelas quatro permutações possíveis dos sinais.

A análise de (21) mostra que para valores de ε compreendidos entre 0 e $\sqrt{2}/2$ (fig. 3-b), os quatro pontos são imaginários, isto é, a evoluta é interior à elipse; para ε igual a $\sqrt{2}/2$, isto é $f=q=p/2$, (fig. 3-c), existem dois pontos reais duplos de coordenadas:

$$X=0 \qquad Y=\pm\frac{p}{2} \tag{22}$$

coincidentes com os vértices da elipse correspondentes ao eixo conjugado ou menor, a evoluta é interior à elipse mas tangente nesses dois pontos; para valores de ε superiores a $\sqrt{2}/2$, (fig. 3-d), a evoluta e a elipse cortam-se em quatro pontos reais de coordenadas dadas por (21).

c) a área da evoluta pode ser obtida como se segue:

$$A_e=4\int_{oo}^{\frac{f^2}{q}} y\,dx \tag{23}$$

ou, atendendo a (10):

$$A_e=\frac{12\,p^2\varepsilon^6}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\int_{o}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4\theta\,\cos^2\theta\,d\theta \tag{24}$$

Integrando por partes, tem-se:

$$A_e=\frac{12\,p^2\varepsilon^6}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left[-\frac{1}{6}\operatorname{sen}^3\theta\,\cos^3\theta-\frac{1}{64}\operatorname{sen}4\theta+\frac{1}{16}\theta\right]_{o}^{\frac{\pi}{2}} \tag{25}$$

donde, finalmente:

$$A_e=\frac{3\pi p^2\varepsilon^6}{8\sqrt{1-\varepsilon^2}}=\frac{3\pi f^4}{8tq} \tag{26}$$

d) a relação das áreas da evoluta, e da elipse, tendo em atenção que a área desta é:

$$A=\pi\,tq=\pi\,p^2\,\varepsilon^2\sqrt{1-\varepsilon^2} \tag{27}$$

é dada por:

$$r_A=\frac{A_e}{A}=\frac{3\,\varepsilon^4}{8(1-\varepsilon^2)} \tag{28}$$

A relação r_A varia desde 0, caso da circunferência de ε nulo, passa por 1, caso da igualdade das áreas que se verifica para a elipse de excentricidade:

$$\varepsilon=\sqrt{\frac{2(\sqrt{10}-2)}{3}} \tag{29}$$

e tende para infinito quando a excentricidade da elipse tende para a unidade;

e) e a relação dos semi-eixos transversos, isto é, dos semi-eixos menor e maior, respectivamente, da evoluta e da elipse, é dada por:

$$r_t=\frac{t_e}{t}=\varepsilon^2 \tag{30}$$

em face de (4) e (15).

A relação r_t tem como valor mínimo zero, caso da circunferência de excentricidade nula, tendendo simultaneamente com a excentricidade da elipse para a unidade;

f) a relação dos semi-eixos conjugados, isto é, dos semi-eixos maior e menor, respectivamente, da evoluta e da elipse, é dada por:

$$r_c=\frac{q_e}{q}=\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \tag{31}$$

tendo em atenção (4) e (16).

A relação r_c tem como valor mínimo zero, caso da circunferência, passa pela unidade para a elipse de excentricidade $\sqrt{2}$ e tende para infinito quando a excentricidade da elipse tende para a unidade;

g) a recta definida por dois vértices consecutivos da evoluta passa por um vértice do rectângulo circunscrito à elipse de lados paralelos aos eixos, e é normal à diagonal desse mesmo rectângulo que não contenha

o vértice considerado (fig. 4). Nesta figura estão indicados os pontos e as suas coordenadas que interessam

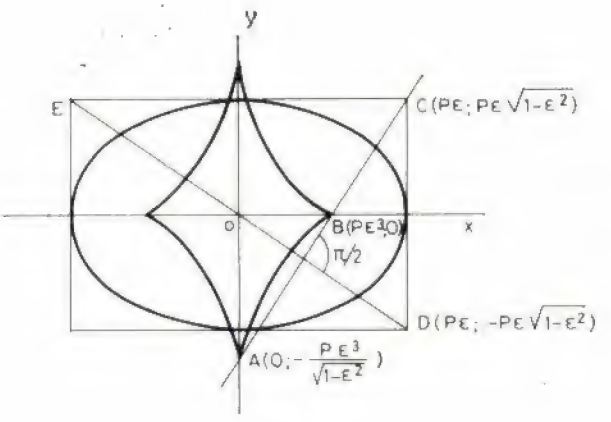


FIG. 4

à verificação da propriedade enunciada. Assim, a recta AC será dada pela equação:

$$y = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} (x - p\ \varepsilon^3) \qquad (32)$$

a qual é verificada pelas coordenadas do ponto C. A recta que contém a diagonal ED é dada pela equação:

$$y = -\sqrt{1-\varepsilon^2}\ x \qquad (33)$$

o que prova ser normal à recta AC;

h) com base nas expressões (10) é possível construir graficamente a evoluta, ponto por ponto, a partir dos seus semi-eixos. Traçaram-se (fig. 5) duas circunferências de raios iguais aos semi-eixos (15) e (16) da evoluta e dois raios vectores u e v fazendo com o eixo OX os ângulos θ e $\pi/2-\theta$, respectivamente. Sendo A o ponto de encontro de u com a circunferência de raio igual ao semi-eixo transverso, traçam-se a normal AC ao eixo OX e a corda AB; pelo ponto C uma parallea a $\overline{AC}$ que encontra u em D, por D uma normal DE a OX, por E uma paralela a $\overline{AB}$ encontrando v em F e finalmente por F uma normal FG a OX: por considerações trigonométricas será:

$$OG = p\ \varepsilon^3 \cos^3 \theta \qquad (34)$$

De maneira análoga se pode obter em relação à circunferência de raio igual ao semi-eixo conjugado, um segmento F'G', que, por considerações trigonométricas seja:

$$F'G' = \frac{p\ \varepsilon^3}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \operatorname{sen}^3 \theta \qquad (35)$$

assim, os quatro pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 por terem abcissas em módulos igual a OG e ordenadas, em módulos, iguais a F'G' satisfazem às equações paramétricas (10) da evoluta, sendo, portanto, pontos da evoluta;

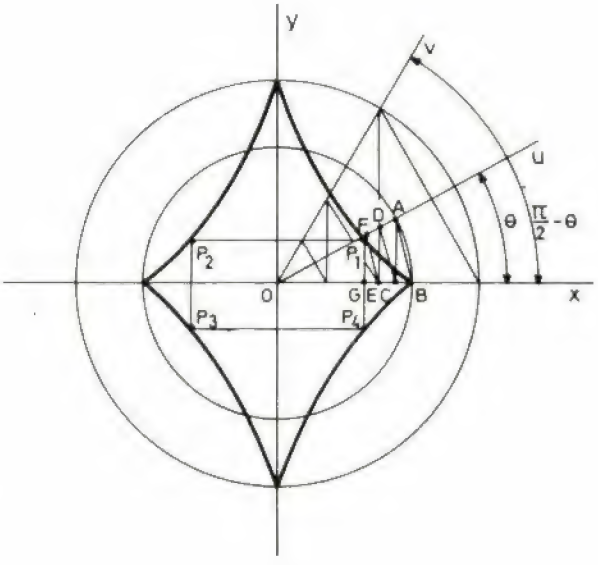


FIG. 5

i) qualquer tangente à evoluta é normal à elipse num ponto em relação ao qual é, também, a bissectriz interna do ângulo formado pelos raios focais relativos a esse ponto (fig. 6).

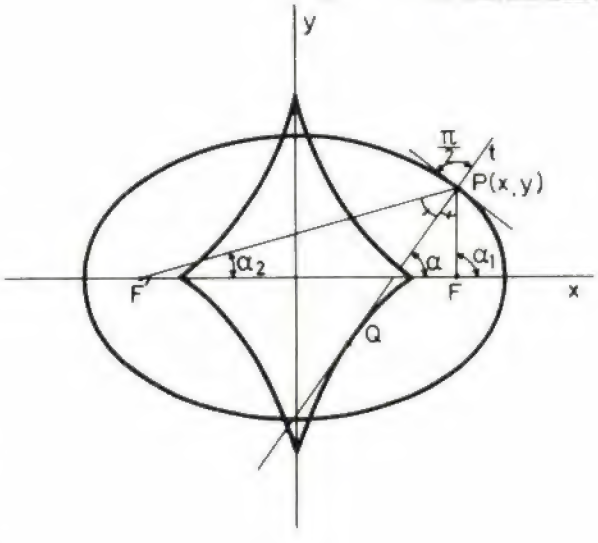


FIG. 6

Por definição de evoluta (ver 1), a tangente t no ponto Q é normal à elipse no ponto correspondente P (ver 2.2 — fig. 2).

Se forem α_1 e α_2 os ângulos que os raios focais de P fazem com a parte positiva do eixo OX; e α o ângulo correspondente da tangente t, a relação entre os três ângulos, de forma que t seja a bissectriz dos raios focais, deve ser:

$$2\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \tag{36}$$

se se designar por m_1, m_2 e m os coeficientes angulares dos raios focais e da tangente, este último será dado em função dos dois primeiros, pela expressão:

$$m = \frac{m_1 m_2 - 1 \pm \sqrt{(m_1^2+1)\ (m_2^2+1)}}{m_1 + m_2} \tag{37}$$

em que o sinais + e — se referem às duas bissectrizes, normais entre si, correspondentes aos dois raios focais, sendo uma a tangente t considerada, e a outra a tangente à elipse no ponto P.

Atendendo à fig. 6 e às expressões (3) será:

$$m_1 = \mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{y}{x - p\ \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\ \mathrm{sen}\ \varphi}{\cos\ \varphi - \varepsilon}$$

$$m_2 = \mathrm{tg}\alpha_2 = \frac{y}{x + p\ \varepsilon^2} = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\ \mathrm{sen}\ \varphi}{\cos\ \varphi + \varepsilon} \tag{38}$$

Substituindo (38) em (37) e resolvendo, resulta:

$$m'(+) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ \mathrm{tg}\ \varphi\ ;\ m''(-) = -\sqrt{1-\varepsilon^2}\ \mathrm{cotg}\ \varphi \tag{39}$$

verficando-se que as direcções correspondentes aos coeficientes angulares m' e m'' são normais entre si, por ser $m'.m'' = -1$.

Por outro lado, se t é normal à elipse, o seu coeficiente angular m_t deverá ser dado pela equação diferencial paramétrica:

$$m_t = -\frac{dx}{dy} = -\frac{dx}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \tag{40}$$

donde, atendendo a (3):

$$m_t = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\ \mathrm{tg}\varphi \tag{41}$$

o que mostra ser t uma das bissectrizes atrás encontrada.

3 — EVOLUTA DA HIPÉRBOLE

3.1 — Equações paramétrica e cartesiana

Seja:

$$f(x,y) = (\varepsilon^2-1)\ x^2 - y^2 - p^2\varepsilon^2(\varepsilon^2-1) = 0 \tag{42}$$

a equação focal de uma hipérbole, de excentricidade ε e directriz r e r' paralelas ao eixo OY e à distância p, em relação aos seus eixos.

A equação (42) poderá ser escrita pondo em evidência os semi-eixos da hipérbole:

$$\frac{x^2}{[p\varepsilon]^2} - \frac{y^2}{[p\varepsilon\ \sqrt{\varepsilon^2-1}]^2} = 1 \tag{43}$$

As equações paramétricas da hipérbole, tendo como parâmetro a amplitude φ indicada na fig. 7, podem ser escritas, em face de (42) ou (45), por:

$$\begin{cases} x = p\varepsilon\ \mathrm{ch}\varphi \\ y = p\varepsilon\ \sqrt{\varepsilon^2-1}\ \mathrm{sh}\varphi \end{cases} \tag{44}$$

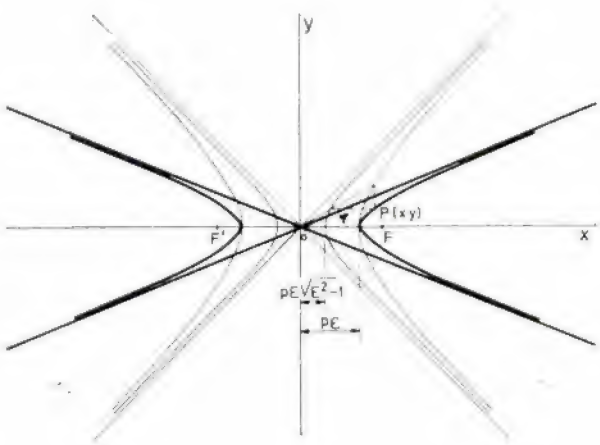


FIG. 7

tendo em atenção as duas hipérboles equiláteras de semi-eixos p ε e p $\varepsilon\ \sqrt{\varepsilon^2-1}$ necessárias à obtenção vcdas coordenadas x e y, respectivamente.

Os semi-eixos transverso, t, e conjugado, q, continuam a ser dados pelos valores indicados em (4), sendo a correspondente semi-distância focal f dada por:

$$f = \sqrt{t^2 + q^2} = p\ \varepsilon^2 \tag{45}$$

A normal num ponto genérico P(X,Y) da hipérbole, é dada pela equação diferencial (C), a qual, tendo em atenção (42) e (44), pode tomar a forma paramétrica:

$$F(x,y,\varphi) = x\ \mathrm{sh}\varphi + \sqrt{\varepsilon^2-1}\ y\ \mathrm{ch}\varphi - \\ - p\ \varepsilon^2\ \mathrm{sh}\varphi\ \mathrm{ch}\varphi = 0 \tag{46}$$

A definição paramétrica da evoluta é dada pelo sistema de equação (8), o qual, atendendo a (46) se pode escrever:

$$\begin{cases} x\ \mathrm{sh}\theta + \sqrt{\varepsilon^2-1}\ y\ \mathrm{ch}\theta - p\ \varepsilon^2\ \mathrm{sh}\theta\ \mathrm{ch}\theta = 0 \\ x\ \mathrm{ch}\theta + \sqrt{\varepsilon^2-1}\ y\ \mathrm{sh}\theta - p\ \varepsilon^2\ \mathrm{ch}\ 2\theta = 0 \end{cases} \tag{47}$$

ou, atendendo a (4) e (45), mais simplesmente:

$$\begin{cases} x = p\ \varepsilon^3\ ch^3\ \theta = \dfrac{f^2}{t}\ ch^3\ \theta \\ y = -\dfrac{p\ \varepsilon^3}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\ sh^3\ \theta = -\dfrac{f^2}{\ }\ sh^3\ \theta \end{cases} \tag{48}$$

continuando, pelas razões já expostas, a distinguir os dois parâmetros φ e θ.

A eliminação do parâmetro θ em (48) conduz à equação cartesiana da evoluta, que será:

$$x^{\frac{2}{3}} - \left[\ \sqrt{\varepsilon^2-1}\ y\ \right]^{\frac{2}{3}} = p^{\frac{2}{3}}\varepsilon^2 \tag{49}$$

ou, pondo em evidência os semi-eixos e a semi-distância focal:

$$[tx]^{\frac{2}{3}} - [q\ y]^{\frac{2}{3}} = f^{\frac{4}{3}} \tag{50}$$

3.2 — Principais características não métricas

Na fig. 8 encontra-se traçado uma hipérbole e a sua evoluta, bem como, os pontos e os sentidos correspondentes entre as duas curvas.

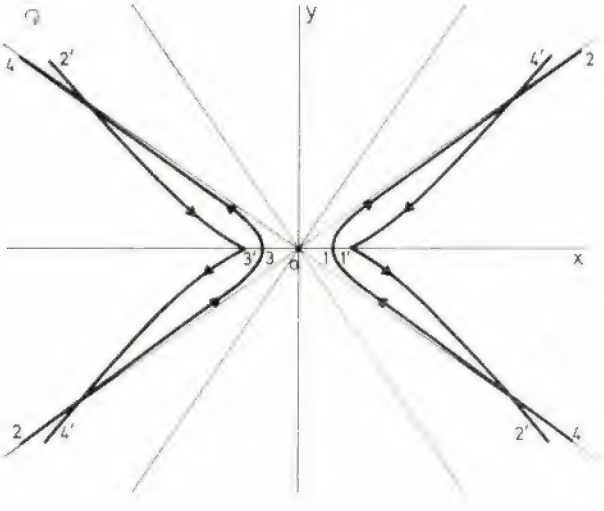


FIG. 8

A análise da fig. 8, conjuntamente com as equações (48), (49) e (50), permite enunciar algumas características não métricas da evoluta:

a) é uma curva aberta, constituída por dois ramos, simétrica em relação ao centro da hipérbole, que também é seu centro, e possuindo duas assimptotas oblíquas;

b) admitir dois eixos coincidentes com os eixos da hipérbole;

c) possui dois vértices que são pontos de reversão de 1.ª espécie ou caratoides, correspondentes à intercepção com o eixo transverso da hipérbole, e sempre interiores a esta;

d) intercepta a hipérbole em 4 pontos, reais e distintos para $f > q\ \sqrt{2}$ ($\varepsilon < \sqrt{2}$), fig. 9-b, impróprios e coincidentes dois a dois para $f = q\ \sqrt{2}$ ($\varepsilon = \sqrt{2}$), fig. 9-c, e imaginários para $f < q\ \sqrt{2}$ ($\varepsilon > \sqrt{2}$), fig. 9-d;

e) as assimptotas da evoluta e da hipérbole coincidem para a hipérbole equilátera, fig. 9-c;

f) degenera em duas semi-rectas (fig. 9-a) no caso do semi-eixo conjugado da hipérbole se anular;

g) degenera em duas rectas coincidentes, a recta imprópria do plano, no caso do semi-eixo conjugado da hipérbole se tornar infinito (fig. 9-e);

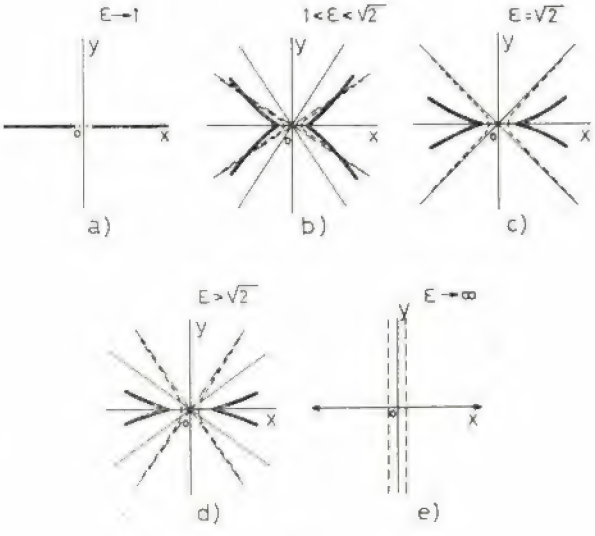


FIG. 9

h) é uma curva unicursal, pois que, se se fizer a mudança da variável:

$$th\ \frac{\theta}{2} = u \tag{51}$$

as expressões (48) tomam a forma:

$$\begin{cases} x = p\ \varepsilon^3 \left[\dfrac{1+u^2}{1-u^2}\right]^3 = \dfrac{f^2}{t}\left[\dfrac{1+u^2}{1-u^2}\right]^3 \\ y = -\dfrac{p\ \varepsilon^3}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\left[\dfrac{2u}{1-u^2}\right]^3 = -\dfrac{f^2}{q}\left[\dfrac{2u}{1-u^2}\right]^3 \end{cases} \tag{52}$$

3.3 — Principais características métricas

Apresentam-se a seguir, com base nas equações de definição da evoluta (48), (49), (50) e (52), algumas

características métricas, consideradas como as principais:

a) o semi-eixo transverso, t_e, existente no eixo OX, é dado pela expressão (15) e resulta de fazer $\theta=0$ na 1.ª expressão (48), $y=0$ nas 1.as expressões (49) e (50), ou ainda $t=0$ na 1.ª expressão (52). O seu valor dado por (15) varia desde $t=f=p$ (fig. 9-a), caso limite do semi-eixo conjugado da hipérbole se anular ($\varepsilon \rightarrow 1$), até infinito (fig. 9-e), caso limite do semi-eixo conjugado da hipérbole ser infinito ($\varepsilon \rightarrow \infty$); assim, o semi-eixo transverso da evoluta é sempre maior que a semi-distância focal da hipérbole;

b) o semi-eixo conjugado, q_e, existente no eixo OY é dado por:

$$q_e = \frac{f^2}{q} = \frac{p\ \varepsilon^3}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \tag{53}$$

e resulta de fazer $\theta = -\operatorname{Ln}(\sqrt{2}+1)$ na 2.ª expressão (48), $x=0$ nas 2.as expressões (49) e (50), ou ainda $t = -\sqrt{2}+1)$ na 2.ª expressão (52). O seu valor dado por (53) varia desde infinito (fig. 9-a) caso limite do semi-eixo conjugado da hipérbole se anular ($\varepsilon \rightarrow 1$), passando por um valor mínimo de $p\,3\sqrt{3}/2$ correspondente a uma excentricidade de $\sqrt{3}/2$, começando a crescer até infinito para o caso limite da excentricidade infinita (fig. 9-e);

c) a evoluta e a hipérbole têm de comum 4 pontos, cujas coordenadas se podem obter da seguinte maneira.

Igualando as coordenadas homólogas da hipérbole (44) e da evoluta (48), resulta:

$$\begin{cases} \operatorname{ch}\varphi = \varepsilon^2 \operatorname{ch}^3\theta \\ \operatorname{sh}\varphi = \dfrac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1} \operatorname{sh}^3\theta \end{cases} \tag{54}$$

quadrando e subtraindo, vem:

$$\varepsilon^4 \operatorname{ch}^6\theta - \frac{\varepsilon^4}{(\varepsilon^2-1)^2} \operatorname{sh}^6\theta = 1 \tag{55}$$

passando para potências de $\operatorname{ch}\theta$ e desembaraçando de denominadores, tem-se:

$$\begin{aligned} &\varepsilon^6(\varepsilon^2-2) \operatorname{ch}^6\theta + 3\varepsilon^4 \operatorname{ch}^4\theta - \\ &\quad -3\varepsilon^4 \operatorname{ch}^2\theta + (2\varepsilon^2-1) = 0 \end{aligned} \tag{56}$$

resolvendo esta equação cúbica em $\operatorname{ch}^2\theta$, verifica-se ter três raízes reais, das quais duas iguais

$$\operatorname{ch}^2\theta_1 = \frac{1-2\varepsilon^2}{\varepsilon^2(\varepsilon^2-2)} \quad ; \quad \operatorname{ch}^2\theta_2 = \operatorname{ch}^2\theta_3 = \frac{1}{\varepsilon^2} \tag{57}$$

as duas raízes iguais não interessam por conduzirem a valores de $\operatorname{ch}\theta$ inferiores à unidade; portanto, atendendo a (48) resulta, da 1.ª raiz:

$$\begin{cases} x = \pm p \left[\dfrac{2\varepsilon^2-1}{2-\varepsilon^2} \right]^{3/2} \\ y = \pm p(\varepsilon^2-1) \left[\dfrac{1+\varepsilon^2}{2-\varepsilon^2} \right]^{3/2} \end{cases} \tag{58}$$

As coordenadas dos quatro pontos, simétricos dois a dois em relação à origem e aos eixos coordenados, obtêm-se pelas quatro permutações possíveis dos sinais, e são formalmente iguais às já obtidas para a intercepção da elipse e da sua evoluta (21).

A análise de (58) mostra que para valores de excentricidade compreendidos entre 1 e $\sqrt{2}$, os quatro pontos são reais e distintos, para $\varepsilon = \sqrt{2}$ (hipérbole equilátera) os quatro pontos se tornam impróprios e iguais dois a dois, e papra valores de ε superiores a $\sqrt{2}$ os quatro pontos se tornam imaginários, pelo que a evoluta é interior à hipérbole correspondente;

d) a evoluta possui duas assímptotas oblíquas, passando pelo centro e normais às assimptotas da hipérbole. Assim, de (50) tem-se para coeficiente angular das assímptotas obliquas:

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{t}{q}\right)^{3/2} - \left(\frac{f^2}{q_x}\right)^{2/2} \right]^{3/2} =$$

$$= \pm \frac{t}{q} = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \tag{59}$$

pelo que, as equações das duas assímptotas oblíquas serão dadas por:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\, x \tag{60}$$

normais às duas assimptotas da hipérbole correspondente, que, como se sabe, são dadas por:

$$y = \mp \sqrt{\varepsilon^2-1}\, x \tag{61}$$

e) a área da evoluta limitada por duas rectas paralelas ao eixo OY e afastadas deste $\pm$ X, pode ser obtida como segue:

$$A_e = 4 \int_0^x y\, dx \tag{62}$$

ou, atendendo a (48):

$$A_e = \frac{12\ p^2\ \varepsilon^6}{\sqrt{\varepsilon^2-1}} \int_0^\theta \operatorname{sh}^4\theta \operatorname{ch}^2\theta\, d\theta \tag{63}$$

integrando por partes, tem-se:

$$A_e = \frac{6\,p^2\,\varepsilon^6}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\left[\frac{1}{3}\,\mathrm{sh}^3\theta\,\mathrm{ch}^3\theta - \frac{1}{32}\,\mathrm{sh}\,4\theta + \frac{1}{8}\theta\right] \quad (64)$$

o argumento θ, tendo em atenção (48) e as propriedades das funções hiperbólicas, é dado por:

$$\theta\ \arg\mathrm{ch}\frac{X^{1/3}}{p^{1/3}\,\varepsilon} = \mathrm{Ln}\frac{1}{p^{1/3}\,\varepsilon}\left[X^{1/3}+(X^{2/3}-p^{2/3}\,\varepsilon^2)^{1/2}\right] \quad (65)$$

A expressão (64) pode ser explicitada em ordem a X, tendo em atenção (48) e (65), assumindo o aspecto:

$$A_e = \frac{3}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\left[2X^{\frac{1}{3}}\left(X^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{2}p^{\frac{2}{3}}\,\varepsilon^2\right)\left(X^{\frac{2}{3}}-\frac{1}{4}p^{\frac{2}{3}}\,\varepsilon^2\right)\left(X^{\frac{2}{3}}-p^{\frac{2}{3}}\,\varepsilon^2\right)^{\frac{1}{2}} + p^2\,\varepsilon^6\arg\mathrm{ch}\frac{X^{\frac{1}{3}}}{p^{\frac{1}{3}}\,\varepsilon}\right] \quad (66)$$

A análise de (66) mostra que para valores de X desde zero a $p\varepsilon^3$ (vértice da evoluta) a área é imaginária, anulando-se para X igual a $p\varepsilon^3$ e crescendo em seguida com X até infinito. Note-se que para valores de X compreendidos entre X_1 e X_2 dados por:

$$X_1 = \varepsilon^3\ ;\ X_2 = \left[\frac{3}{2}\right]^{\frac{3}{2}} p\,\varepsilon^3 \quad (67)$$

a primeira parcela de (66) é negativa, anulando-se para o valor de X_2, a que corresponde então a área de:

$$A_e = p^2\,\varepsilon^6\ \arg\mathrm{ch}\left[\frac{3}{2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (68)$$

se se der a X o valor incerto na 1.ª expressão de (58) a área da evoluta corresponderá à faixa limitada pelas rectas paralelas ao eixo OY passando pelos pontos de encontro da evoluta e da hipérbole, e será dado pela expressão:

$$A_e = 3\,p^2\left[\frac{(3\,\varepsilon^4-2\,\varepsilon^2-2)\,(\varepsilon^4+6\,\varepsilon^2-4)\,(\varepsilon^2+1)^{\frac{1}{2}}}{4(2-\varepsilon^2)^3} + \frac{\varepsilon^6}{(\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}}\arg\mathrm{ch}\frac{(2\varepsilon^2-1)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon(2-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}}\right] \quad (69)$$

verificando-se que só é real para valores da excentricidade compreendidos entre 1 e $\sqrt{2}$, tornando infinita para este último valor e imaginário para valores superiores;

f) a relação dos semi-eixos transversos da evoluta e da hipérbole, é dada pelo valor (30) já encontrado para o caso da evoluta da elipse;

g) a relação dos semi-eixos conjugados da evoluta e da hipérbole é dada por:

$$r_e = \frac{q_e}{q} = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2-1} \quad (70)$$

tendo em atenção (4) e (53).

A relação r_e tem valor infinito para o caso limite da excentricidade igual à unidade e tendo assimptoticamente para a undade quando a excentricdade tende para infinito;

h) a recta definida por um vértice da evoluta e paralela a uma das assímptotas desta, passa por um vértice do rectângulo definidor das assímptotas da hipérbole e é normal à assímptota correspondente a esse vértice (fig. 10). Por esta figura se vê que a recta BC é definida pela equação (32), a qual é verificada pelas

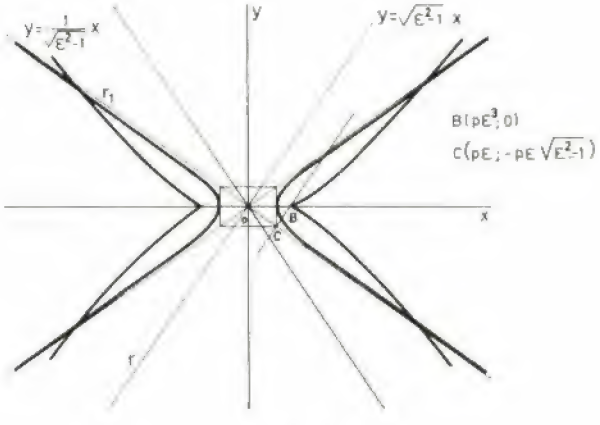


FIG. 10

coordenadas do ponto C; a recta BC, por ser paralela à assímptota r da evoluta é normal à assíntota r_1 da hipérbole (ver propriedade d);

i) baseado nas expressões (48) é possível construir graficamente, ponto por ponto, a evoluta a partir dos seus semi-eixos. Traçam-se as duas hipérboles equiláteras de semi-eixos transversos existentes no eixo OX e de valores iguais aos semi-eixos da evoluta, t_e e q_e e um raio vector v de argumento θ (fig. 11). Sendo A o ponto de encontro de v com a hipérbole equilátera de semi-eixo t_e, traça-se a normal AC ao eixo OX e a corda AB, por C a corda CD paralela a AB, por D a normal DE ao eixo OX, por E a corda EF paralela a AB e finalmente por F a normal FG ao eixo OX; atendendo às propriedades homotéticas da família de hipérboles

equiláteras concêntricas, e às propriedades das funções hiperbólicas que:

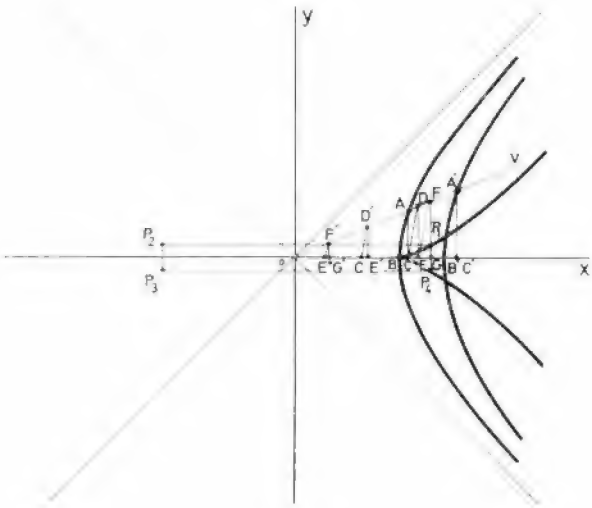


FIG. 11

$$OG = t_c \ ch^3 \theta = p \ \varepsilon^3 \ ch^3 \theta \qquad (71)$$

Por outro lado, sendo A' ponto de encontro de v com a hipérbole equilátera de semi-eixos q_e, traça-se a normal A'C' ao eixo OX; marca-se C'' tal que OC'' = = A'C', por C'' a paralela C''D' a AB, por D' a normal D'E' ao eixo OX; marca-se E'' tal que OE'' = D'E', por E'' a paralela E''F' a AB e finalmente por F' a normal F'G' ao eixo OX; atendendo às propriedades invocadas atrás pode afirmar-se que:

$$F'G' = q_e \ sh^3 \theta = \frac{p \ \varepsilon^3}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ sh^3 \theta \qquad (72)$$

Assim, os quatro pontos P_1, P_2, P_3 e P_4 são pontos da evoluta por terem coordenadas cujas abcissas em módulo são OG e cujas ordenadas em módulo são F'G', satisfazendo assim às equações paramétricas (48);

j) qualquer tangente à evoluta é normal à hipérbole num ponto em relação ao qual é, também, a bissectriz externa do ângulo formado pelos raios focais relativos a esse ponto (fig. 12).

Tendo em atenção a fig. 12 e o que foi escrito em 2.3.-i) pode afirmar-se que os coeficientes angulares m_1 e m_2 dos raios focais serão, de acordo com as expressões (44):

$$m_1 = tg \ \alpha_1 = \frac{y}{x - p\varepsilon^2} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \ sh \varphi}{ch \varphi - \varepsilon}$$

$$m_2 = tg \ \alpha_2 = \frac{y}{x + p\varepsilon^2} = \frac{\sqrt{\varepsilon^2 - 1} \ sh \varphi}{ch \varphi + \varepsilon} \qquad (73)$$

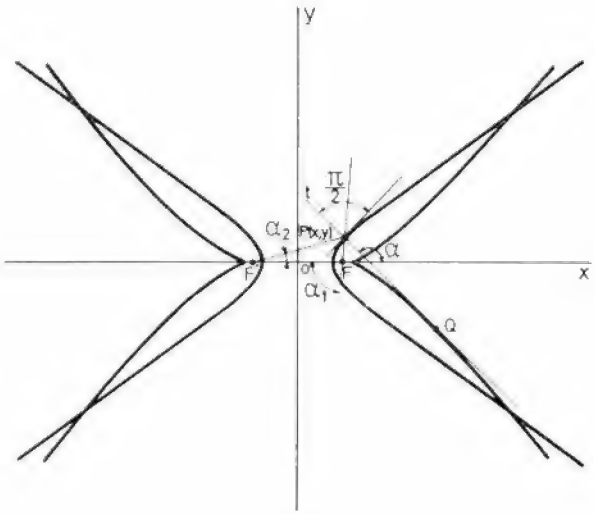


FIG. 12

Substituindo (73) em (37) e resolvendo, resulta:

$$m'(+) = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} \ cth \varphi \ ; \ m''(-) = - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ th \varphi \qquad (74)$$

verificando-se que são normais entre si as direcções correspondentes a m' e m'' por ser m'.m'' = — 1.

Por outro lado, se a recta t é normal à hipérbole, o seu coeficiente angular m_t obedece à equação diferencial (40), a qual, tendo em atenção (44), será dado por:

$$m_t = - \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 - 1}} \ th \varphi \qquad (75)$$

o que prova ser t uma das bissectrizes encontradas.

4 — EVOLUTA DA PARÁBOLA

4.1 — Equações paramétrica e cartesiana

Seja:

$$f(x, y) = y^2 - 4 p \ x = 0 \qquad (76)$$

a equação cartesiana da parábola de vértice na origem e directriz r paralela ao eixo OY e à distância p.

Se se considerar y como parâmetro, a equação (76) pode ser escrita parametricamente como se segue:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{4 \ p} \ Y^2 \\ y = Y \end{cases} \qquad (77)$$

A normal num ponto genérico P(X, Y) da parábola, é dada pela equação diferencial (6), a qual, tendo em atenção (76) e (77), pode tomar a forma paramétrica:

$$F(x,y,Y) = 4 p \ Y \ x + 8 p^2 y - Y^3 - 8 \ p^2 Y = 0 \qquad (78)$$

A definição paramétrica da evoluta é dada pelo sistema de equações (8), o qual, tendo em atenção (78), se pode escrever:

$$\begin{cases} 4\,p\,Y\,x+8\,p^2\,y-Y^3-8\,p^2\,Y=0 \\ 4\,p\,x-Y^2-8\,p^2=0 \end{cases} \tag{79}$$

ou, explicitando nas variáveis x e y:

$$\begin{cases} x=\dfrac{3}{4\,p}\,Y^2+2\,p \\ y=-\dfrac{1}{4\,p^2}\,Y^3 \end{cases} \tag{80}$$

o que prova ser, como as evolutas anteriores, uma curva unicursal.

A equação cartesiana da evoluta, obtém-se pela eliminação do parâmetro Y nas expressões (79), donde:

$$4(x-2\,p)^3-27\,p\;y^2=0 \tag{81}$$

4.2 — Principais características não métricas

Na fig. 13 encontra-se traçada uma parábola e a sua evoluta, bem como os pontos e os sentidos correspondentes entre as duas curvas.

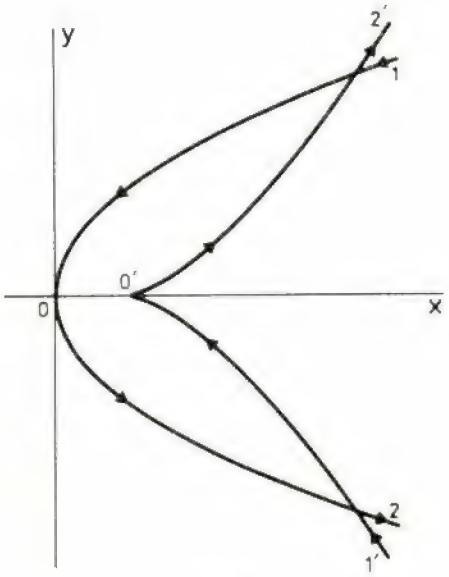


FIG. 13

A análise conjunta da fig. 13 e das expressões (80) e (81), permite enunciar algumas características não métricas da evoluta:

a) é uma curva aberta, simétrica em relação a um eixo que se identifica com o eixo transverso da parábola;

b) possui um vértice, que é um ponto de reversão da 1.ª espécie ou caratoide, correspondente à intercepção com o eixo transverso da parábola, e sempre interior a esta;

c) intercepta a parábola em dois pontos, reais e distintos;

d) degenera numa recta normal à recta degenerescência da parábola;

e) é uma curva unicursal, por as suas coordenadas se poderem exprimir por funções racionais de um único parâmetro, como se pode constatar por (80).

4.3 — Principais características métricas

Apresentam-se a seguir baseado nas equações (80) e (81) da evoluta, as principais características métricas:

a) o vértice da evoluta de coordenadas (2 p; 0) encontra-se sobre o eixo comum da evoluta e da parábola a uma distância de vértice dupla da distância focal;

b) a evoluta e a parábola têm de comum dois pontos, cujas coordenadas se obtêm resolvendo o sistema constituído pelas equações (76) e (81), e são:

$$x=8\,p\;;\;y=\pm 4\,\sqrt{2\,p} \tag{82}$$

c) a área da evoluta limitada por uma recta paralela ao eixo OY e afastada deste X, é dada por:

$$A_e=2\int_{2p}^{x} y\,dx \tag{83}$$

ou, atendendo a (81):

$$A_e=\frac{4}{3\,\sqrt{3\,p}}\int_{2p}^{x}(x-2\,p)^{\frac{3}{2}}\,dx \tag{84}$$

donde:

$$A_e=\frac{8}{15\,\sqrt{3\,p}}\left[(X-2\,p)^{\frac{5}{2}}\right] \tag{85}$$

A análise de (85) mostra que para valores de X, desde zero a 2 p a área é imaginária, anulando-se para X = 2 p (vértice da evoluta), e crescendo em seguida com X até infinito. A área da evoluta limitada pela recta definida pelos pontos de encontro desta com a parábola, tem, por valor, atendendo a (82) e (85):

$$A_e=\frac{96\,\sqrt{2}}{5}\,p^2 \tag{86}$$

d) a relação das áreas da evoluta e da parábola limitada por uma recta paralela ao eixo OY da abcissa X é dada por:

$$r = \frac{A_e}{} = \frac{(X-2p)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{3}\, p\, X^{\frac{3}{2}}} \qquad (87)$$

sabendo-se que a área da parábola em causa é dada por:

$$A = \frac{8}{3} \sqrt{p}\, X^{\frac{3}{2}} \qquad (88)$$

e) baseado nas expressões (77) e (80) é possível construir graficamente, ponto por ponto, a evoluta a partir da parábola. Qualquer recta paralela ao eixo OX da ordenada Y corta-parábola num ponto de coordenadas dadas por (77), então as coordenadas do ponto da evoluta dadas por (80) poderão ser obtidas como se segue (fig. 14). Com base nas coordenadas de um ponto P da parábola, marca-se sobre o eixo OX um segmento $\overline{OD}$, tal que seja:

$$\overline{OD} = \overline{OC} + \overline{CD} = 3\overline{OA} + 2\overline{OF} \qquad (89)$$

mas, por ser:

$$\overline{OA} = \frac{Y^2}{4p} \quad ; \quad \overline{OF} = p \qquad (90)$$

será, por substituição em (89):

$$\overline{OD} = \frac{3}{4p} Y^2 + 2p = x \qquad (91)$$

Por outro lado traçando o segmento $\overline{AE}$ paralelo a $\overline{BF}$, os dois triângulos semelhantes [OBF] e [OEA] permitem escrever:

$$\frac{\overline{OB}}{\overline{OF}} = \frac{\overline{OE}}{\overline{OA}} \qquad (92)$$

donde, por ser:

$$\overline{OB} = Y \qquad \overline{OF} = p \qquad \overline{OA} = \frac{Y^2}{4p} \qquad (93)$$

será:

$$\overline{OE} = \frac{1}{4p^2} Y^3 = y \qquad (94)$$

Os pontos P_1 e P_2 por terem coordenadas em módulo iguais a (91) e (94) pertencem à evoluta de equações paramétricas (80).

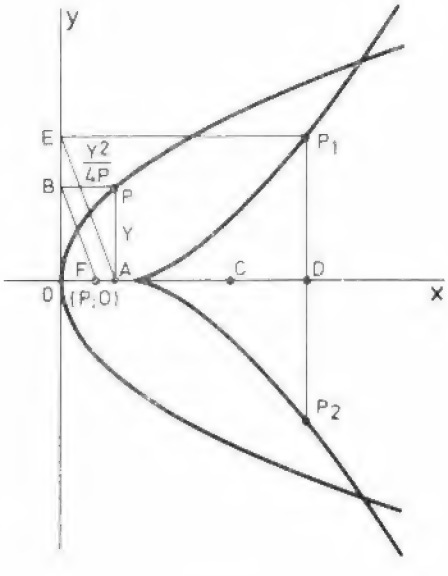


FIG. 14

NOTICIÁRIO

(Continuação da pág. 200)

FEIRA SYSTEMOTECHNIKA'80

Feira Internacional Profissional para sistemas de organização de escritórios,

NOWEA Presse-Informationen — Düsseldorfer Messegesellschaft mbH -NOWEA
Postfach 32 02 03, D-4000 Düsseldorf 30, Telefon: (02 11) 45 60-1, Telex: 8 584 853 mes d

Representante para Portugal:

WALTER & Cia., Lda. — Largo de Andaluz, 15, 3.º Dt.º-4, 1000 LISBOA

(Continua na pág. 226)

Algumas ocorrências scheelíticas em rochas calco-silicatadas do norte de Portugal

A. F. FERREIRA PINTO
Departamento de Mineralogia e Geologia
Universidade de Coimbra — Portugal
A. F. BARROS
Departamento de Engenharia de Minas
Universidade de Coimbra — Portugal

RESUMO

No presente trabalho continua-se o estudo de afloramentos de rochas calco-silicatadas com mineralizações scheelíticas. Trata-se de afloramentos de pouca representação incluídos em retalhos xistosos de idade ante-ordovícica e silúrica que estão incluídos em rochas granitóides e que se localizam nas Províncias do Minho, Trás-os-Montes e Alto Douro. Relativamente a cada uma das ocorrências, referem-se alguns aspectos geológicos e a análise petrográfica. No final apresentam-se considerações genéticas.

Embora não revelando interesse económico pela fraca representatividade e pela mineralização scheelítica finamente dispersa e pouco abundante o estudo de tais afloramentos tem interesse no possível estabelecimento de guias de prospecção da scheelite e pelo contributo para o conhecimento da composição litológica do Complexo Xisto-Grauváquico e do Silúrico.

SUMMARY

Some ante-Ordovician and Silurian rocks intruded by Hercynian granitic magma in Minho, Tras-os-Montes and Alto-Douro originated skarns and amphibolites with scheelite. Some geological notes, petrography and genetic considerations are given.

Although the scheelite mineralization is poorly disseminated, so it has no economic interest, this note tries to contribute to the possible preparation of prospecting guides of scheelite and to the study of the litology of the Schist — Metagraywacke Complex and of the Silurian.

INTRODUÇÃO

Incluído no prosseguimento dum trabalho de prospecção, o presente estudo faz referência a aspectos geológicos, mineralógicos e genéticos de algumas unidades calco-silicatadas do norte do País onde foram observadas mineralizações em scheelite.

Os afloramentos agora referidos situam-se nas províncias do Minho, Alto Douro e Trás-os-Montes: Insalde (carta top. 1:25 000 — n.º 7), Extremo (carta top. 1:25 000 — n.º 8), Banido (carta top. 1:25 000 — n.º 72), zona da Venda Nova (cartas top. 1:25 000 — n.ºs 44 e 45) e Atei (carta top. 1:25 000 — n.º 73).

As mineralizações foram pela primeira vez detectadas em trabalhos de prospecção efectuados em 1975 por M. M. Azevedo e um dos autores (A. F. Barros).

Embora os afloramentos descritos não revelem interesse económico, não só pelo seu fraco desenvolvimento mas também pela esporádica e fina mineralização scheelítica, pensamos ser importante o seu estudo por poder fornecer guias de prospecção sistemática para zonas geologicamente semelhantes e também por poder contribuir para melhor compreensão da composição litológica do Complexo Xisto-Grauváquico.

INSALDE

Junto a Insalde, no contacto do granito de grão grosseiro porfiróide com rochas do Complexo Xisto-Grauváquico ante-ordovícico profundamente metamorfizadas, podem referir-se dois afloramentos de unidades calco-silicatadas pouco desenvolvidos.

Manuscrito recebido para publicação em 15/7/77.

Um situa-se ao Km 43 da estrada nacional que se dirige para Paredes de Coura, formado por uma sucessão de finos leitos subverticais muito alterados e com direcção Norte-Sul; e outro localizado próximo da ponte de Codecede, na estrada para a povoação de Insalde (coordenadas aproximadas: M=166.775, P= =552.000) onde os leitos calco-silicatados subverticais revelam ainda orientação Norte-Sul.

• OCORRÊNCIAS DE ROCHAS CALCO-SILICATADAS COM SCHEELITE

ESC. 1:500.000

FIG. 1

Em qualquer dos casos as possanças são reduzidas não ultrapassando 50 centímetros.

Macroscopicamente trata-se de rochas de grão fino a médio revelando geralmente tonalidades verde a verde-acizentado e foliação mal definida. Normalmente uma capa de alteração fortemente impregnada por óxidos de ferro castanho avermelhados envolve e corrói as rochas.

Os afloramentos revelam associação de corneanas calco-silicatadas que passam a anfibolitos, sendo possível acompanhar tal transição.

Corneanas calco-silicatadas

Este tipo de rochas revela textura granoblástica que pode passar a porfirogranoblástica pelo desenvolvimento de cristais piroxénicos; neste caso a matriz granoblástica, equigranular, é formada por mosaico de piroxenas e plagioclase com quartzo menos abundante.

Clinopiroxena — Principal constituinte das rochas, encontra-se em pequenos grãos na matriz (dimensões médias da ordem dos 0,2 mm) ou em cristais desenvolvidos que podem assumir hábito prismático (dimensões máximas de 9 mm).

Trata-se de diópsido com coloração levemente esverdeada, sem pleocroísmo evidente. Inúmeras inclusões de esfena, plagioclase, quartzo e opacos conferem-lhe carácter poiciloblástico; particularmente os grãos dos opacos podem assumir grande desenvolvimento com dimensões máximas de 2 mm, em formas prismáticas dispostas segundo o eixo maior dos cristais piroxénicos.

Sobre os cristais diopsídicos pode desenvolver-se uma anfíbola de tons verdes, que inicia o crescimento ao longo e a partir dos planos de clivagem, e também perifericamente conferindo às secções aspectos franjados; tal anfíbola de substituição possui cor verde azulada (ng) até verde pálido (np) e pode surgir também em núcleos irregularmente dispersos no seio da piroxena.

Plagioclase — Aspectos finamente granulados com profunda substituição por agregados de lamelas sericíticas; dimensões máximas da ordem dos 0,9 mm. Estrutura zonada irregular ou com núcleos mais cálcicos que podem estar irregularmente distribuídos. Geminações segundo a lei da albite e raras associações albite-periclina. Trata-se de bytownite (An 72).

Quartzo — Cristais granulares (dimensões entre 0,12 e 0,8 mm) que, associando-se à plagioclase, formam uma matriz; alguns grãos podem atingir maior desenvolvimento (2,2 mm). Também ocorre sob a forma de intercrescimentos com a plagioclase, então sob forma de pequenas gotículas e bastonetes encurvados, ou moldando cristais plagioclásicos.

A extinção é ondulante e as fracturas particularmente visíveis a nível dos cristais mais desenvolvidos.

Esfena — Trata-se de mineral acessório muito abundante sob forma de pequenos grãos ou em cristais rômbicos normalmente formando agregados que definem finas bandas paralelas, ou dispondo-se a contornar cristais diopsídicos (fig. 2). As dimensões má-

FIG. 2

Grande desenvolvimento de cristais de esfena formando agregados que limitam cristais diopsídicos e quartzo. Outros minerais são plagioclase muito alterada e opacos (luz nat.)

ximas não ultrapassam 0,3 mm mas as mais frequentes rondam 0,087 mm.

As associações de grãos deste mineral formam finas bandas que localmente se podem espessar originando núcleos com espessura apreciável (1,7 mm).

Além desta esfena perfeitamente cristalizada, há outra geração do mineral, que deverá ser posterior, e assume a forma de veios que atravessam a rocha, cortando os minerais componentes, particularmente o diópsido.

A scheelite, finamente disseminada, ocorre na rocha com certa frequência sob a forma de grãos que se associam de modo preferencial aos leitos de esfena.

Acessoriamente encontra-se clinozoizite e grãos de opacos que podem atingir grande desenvolvimento, sendo por vezes envolvidos pelo primeiro mineral.

Os aspectos estrutural e textural das rochas não se revelam homogéneos e assim, ao lado de zonas com textura mais grosseira e com tendência a porfiroblastismo acentuado, há outras de mais fina granulometria e diferente composição mineralógica.

Assim o diópsido tende a revelar-se sob forma granular associando-se à plagioclase e ao quartzo. Estes dois componentes revelam frequentemente intercrescimentos íntimos tornando difícil a individualização dos grãos, surgindo o quartzo sob forma de pequenas partículas no seio do feldspato.

Ainda neste caso a plagioclase se mostra profundamente alterada, continuando a evidenciar geminações mais frequentes segundo a lei da albite.

Associando-se a estes minerais há agora a fluorite sob a forma de secções intersticiais sem formas definidas, incolores. O desenvolvimento posterior do mineral revela-se pela corrosão e penetração que estabelece relativamente à plagioclase que fica por ele envolvida.

Também a idocrase se desenvolve em cristais corroídos, incluindo os restantes componentes da rocha; o mineral é penetrado sob a forma de finas vénulas pela granada incolor.

Acessoriamente desenvolvem-se apatite, esfena, clinozoizite, opacos e scheelite, embora este mineral seja mais abundante na parte da rocha de granulometria mais grosseira.

A transição entre estas rochas e os anfibolitos faz-se por tipos litológicos de textura granolepidoblástica, em que os componentes mais importantes são plagioclase, quartzo e anfíbolas.

Anfíbolas — Parece poder admitir-se a existência de duas gerações destes minerais: uma ocorrendo como cristais granulares em agregados (dimensões não ultrapassando 0,3 mm) de cor castanha (ng) até castanho amarelado (np.), embora nalguns casos passe periferimente a tons verde-azulados em franjas finas e mal definidas, e com ângulos de extinção de 20º c∧ng; outra anfíbola resulta da substituição de anteriores cristais diopsídicos, cujos «restos» ainda são visíveis, e revela cor azulada (ng) até verde amarelado (np), decalcando-se sobre a piroxena em continuidade óptica e conferindo aos cristais aspectos feltrados com terminações aciculares. Nesta anfíbola a coloração não é uniforme, podendo notar-se núcleos mais pálidos irregularmente distribuídos. Os cristais são fortemente corroídos pela plagioclase e a substituição anfibólica pode acompanhar-se por grãos de esfena leucoxenizada. Desta forma se desenvolvem aspectos feltrados, a que as inclusões granulares dos opacos e os pequenos grânulos de esfena conferem estrutura esponjosa.

Plagioclase — Forma matriz que envolve e corrói profundamente os cristais anfibólico-piroxénicos. Uma sericitização acentuada destrói o mineral originando-se assim uma massa informe. A estrutura é normalmente zonada, de modo irregular, e as dimensões máximas são da ordem dos 0,87 mm. Podem detectar-se maclas da albite e associações albite-periclina que revelam nalguns casos encurvamentos de planos de macla. Trata-se de Labradorite (An 60).

Quartzo — Associa-se à plagioclase mas é menos frequente e pode assumir formas intersticiais, moldando aquele mineral.

Acessoriamente ocorrem esfena, clinozoizite, apatite, opacos e prenite em manchas ou rodeando opacos. Impregnações de óxidos de ferro castanho-avermelhados afectam de modo particularmente pronunciado os cristais de diópsido.

Outros tipos de transição, possivelmente menos evoluídos, revelam cristais de natureza diopsídica fortemente desenvolvidos (dimensões máximas de 8 mm), com abundantes inclusões granulares de plagioclase que lhe conferem estruturas poiciloblásticas. O mineral revela cor verde muito pálida e sobre ele se inicia o desenvolvimento de anfíbola uralítica fibrosa, que pode assumir distribuições irregulares e confere aos cristais aspectos manchados. Podem encontrar-se maclas segundo (100); ângulos de extinção de 43º c∧ng.

As anfíbolas que este tipo de transição contém são de duas naturezas. Uma com origem secundária e resultante da substituição piroxénica; de modo geral e talvez como resultado de tal substituição a coloração está não uniformemente distribuída,, havendo no entanto tendência para cores castanhas levemente esverdeadas (ng) até castanho-amareladas (np).

Inclusões muito abundantes de grãos de opacos, esfena, quartzo e plagioclase conferem aos cristais aspectos profundamente corroídos e estrutura poiciloblástica.

Outra anfíbola desenvolve-se sob a forma de lamelas prismáticas com terminações franjadas e com tonalidades verde azuladas pálidas (ng) até verde amarelado (np). Trata-se de uma anfíbola actinolítica com ângulos de extinção de 13º c∧ng. Tal anfíbola constitui uma massa de aspecto feltrado que invade os restantes minerais ou dispõe-se em rosetas.

A plagioclase, intersticial, mostra-se alterada para lamelas sericíticas e pode formar intercrescimentos com o quartzo. As acções tectónicas marcam-se por encurvamentos e fracturas dos planos de macla, po-

dendo ser evidente microrejectos. Trata-se de bytownite, com percentagens anortíticas variando entre 72 e 74 %.

O quartzo é pouco frequente, encontrando-se normalmente intercrescido no seio do feldspato e da piroxena.

Com características acessórias ocorrem idocrase, clinozoizite, esfena, apatite, opacos (em grande parte sulfuretos), fluorite em secções irregulares normalmente rodeadas por uma faixa de idocrase que pode ainda contornar cristais piroxénicos.

A calcite, pouco frequente, encontra-se normalmente no seio da piroxena ou penetrando-a; a scheelite encontra-se sob a forma de pequenos grãos.

Tipos anfibólicos:

As rochas revelam texturas grano a granolepidoblásticas, podendo ser evidente uma foliação particularmente definida pelos cristais anfibólicos, ou marcada pela alternância de faixas essencialmente feldspáticas com outras de natureza anfibólica.

Plagioclase — Mineral muito abundante, normalmente sob forma granular constituindo mosaico, associando-se ao quartzo. Dimensões variando entre 0,04 e 0,52 mm, revelando os cristais mais desenvolvidos tendência a hábitos prismáticos. Estrutura zonada pode evidenciar núcleos mais cálcicos, mas também podem encontrar-se, embora com carácter mais esporádico, faixas periféricas mais ricas em molécula anortítica. Trata-se de labradorite com teores anortíticos variáveis entre 62 e 68 %, mas num cristal zonado determinou-se composição labradorítica (An 58) para o núcleo e bytownítica (An 86) para a faixa periférica.

Anfíbolas — Normalmente notam-se dois tipos anfibólicos nestas rochas. Num caso os cristais revelam cor castanha muito levemente esverdeada (ng) até castanho amarelado (np), podendo mesmo passar a tons castanho escuros. Esta horneblenda encontra-se em cristais de hábito prismático (dimensões variando entre 0,7 e 1.04 mm), que pela sua orientação alinhada podem definir uma foliação, ou com aspecto granular (dimensões entre 0,05 e 0,2 mm). Como inclusões notam-se pequenos grãos de quartzo, plagioclase e opacos, além de pontuações de minerais radioactivos rodeados por auréolas pleocróicas de tom castanho escuro. Os ângulos médios de extinção são de 16° c∧ng.

Uma outra anfíbola revela características secundárias e evolui a partir da horneblenda acima referida, decalcando-se sobre os cristais a partir da periferia e daí resultando aspectos franjados. Trata-se de uma anfíbola fibrosa de cor verde azulada a verde garrafa (ng) até verde amarelado (np), que, iniciando o desenvolvimento periférico, pode ocupar grande parte dos cristais da primeira anfíbola. Resultam assim cristais de aspecto feltrado com coloração irregularmente distribuída e núcleos de cor mais acastanhada.

Clinopiroxena — Tem carácter esporádico e nalguns dos tipos estudados só foi referenciada em limitadas zonas. Tem a forma de cristais de hábito prismático que revelam profunda substituição anfibólica; deste modo em muitos casos apenas se identificaram núcleos do mineral inicial.

Com carácter acessório podem ser referidos: biotite, em pequenas lamelas de cor castanha avermelhada (ng=nm) até castanha amarelada (np); quartzo; zircão; clinozoizite; apatite; opacos, em grãos ou sob a forma de filmes contornando cristais plagioclásicos.

EXTREMO

Na estrada que de Arcos de Valdevez se dirige para Caminha, ao km 49.900, localiza-se um conjunto de cinco camadas de rochas calco-magnesianas ocorrendo num retalho do Complexo Xisto-Grauváquico que o granito regional envolveu.

As bancadas, grosseiramente paralelas , têm direcções variando entre N-15° W e N-30° W, inclinam à volta de 5° SW, e revelam possanças entre 40 e 150 cm.

O conjunto é particularmente observável na barreira da estrada, onde as bancadas sobressaem da rocha xistosa profundamente alterada, mas prolonga-se para Este sendo detectável apenas pela existência de calhaus soltos.

Rocha encaixante:

Macroscopicamente a rocha xistosa revela influência de acções de contacto exercidas pelo granito, com xistosidade profundamente conturbada e sobressaindo minerais micáceos e agregados feldspáticos.

Ao microscópico, o quartzo é detectado em grandes cristais com extinção marcadamente ondulante, intensamente fracturados, que, agregando-se, dão origem a formações amigdalares ou lentículas contornadas pelos minerais micáceos. As micas estão abundantemente representadas com predominância da moscovite sobre a biotite. À mica branca, sob a forma de cristais prismáticos (dimensões máximas da ordem dos 3,4 mm), associa-se a biotite, cujas dimensões podem atingir 1,5 mm, de cor castanha intensamente avermelhada (ng) até castanha amarelada (np). Uma cloritização pode afectar os cristais biotíticos, que passam então a cor verde acastanhada com desenvolvimento de agulhas de rútilo.

A moscovite, normalmente com terminações fortemente franjadas, possui planos de clivagem encurvados e ao longo dos quais se alojam impregnações de óxidos de ferro. Aspectos de dobramentos em «Kink» são frequentes.

Menos frequente que os anteriores minerais, a plagioclase mostra-se profundamente substituída por agregados micáceos e só esporadicamente são detectáveis esboços de maclas.

Acessoriamente podem surgir turmalina, apatite e opacos em grãos esporádicos.

Rochas calco-magnesianas:

Das cinco bancadas observáveis no afloramento, quatro são constituídas por rochas do tipo de corneanas calco-silicatadas e uma é de natureza anfibolítica. Passaremos a descrever os dois tipos.

Corneadas calco-silicatadas:

Macroscopicamente as rochas deste tipo são idênticas, mostrando tonalidades verde acizentadas, grão fino e foliação pouco marcada ou ausente. Pontuações de sulfuretos são sempre bem visíveis, e concentrações ou veios de quartzo tornam as rochas localmente mais claras.

Ao microscópio a textura revela-se granoblástica, podendo passar a porfiroblástica, enquanto que se observa foliação pouco definida por estreitas bandas de quartzo ou pelo alinhamento de cristais piroxénicos.

Quartzo — Mineral presente em todas as rochas estudadas em percentagens volumétricas variáveis entre 2,36 e 16,14 %. Os grãos podem revelar estiramento segundo a foliação, que se acentua pela individualização de bandas deste mineral. Nalgumas das rochas estudadas o mineral assume grande desenvolvimento, em cristais que atingem até 5 mm, formando agregados que sobressaem da rocha.

Plagioclase — Trata-se do mineral mais representado em todas as rochas analisadas, formando matriz, e onde as geminações são pouco frequentes ou muito mal definidas. As dimensões médias rondam 0,6 mm, mas podem atingir 1,7 mm. Estes cristais mais desenvolvidos revelam estrutura poiciloblástica, com inclusões abundantes de quartzo normalmente dispostas segundo os planos de macla. Trata-se de bytownite com percentagens anortíticas variando entre 74 e 78 %. Uma alteração para sericite e clinozoizite corrói os cristais.

Clinopiroxena — Cristais granulares (dimensões variáveis entre 0,1 e 1,5 mm) que podem revelar crescimento preferencial paralelamente à foliação ou hábito prismático mal marcado e com dimensões máximas da ordem dos 2 mm. Uma corrosão mais ou menos profunda atacou o mineral e foi exercida pela matriz quartzo-feldspática. Trata-se de uma piroxena diopsídica que assume coloração verde muito pálida e possui ângulos de extinção médios da ordem dos 47º $c \wedge ng$.

Alteração uralítica acentuada decalca-se sobre os cristais conferindo-lhes aspectos fibrosos; esta substituição inicia-se a partir dos planos de clivagem, conferindo às secções tonalidades verdes levemente azuladas (ng) até amarelo esverdeado (np). Também a calcite se pode decalcar sobre a piroxena que normalmente contém inclusões de apatite, opacos e clinozoizite.

Anfíbolas — Presentes nas rochas podem referir-se dois tipos de anfíbolas. Uma de natureza actinolítica, de hábito prismático e terminações franjadas, cor verde levemente azulada (ng) até amarelo esverdeado (np) e ângulos de extinção de 15º $c \wedge ng$. Outro tipo revela cor verde levemente acastanhada (ng) até amarela acastanhada (np) e encontra-se quer em secções prismáticas, quer em cristais rômbicos basais e com dois sistemas de clivagem. Os ângulos de extinção são de 18º $c \wedge ng$. Numerosas inclusões conferem a esta anfíbola estrutura poiciloblástica. A existência dos dois tipos anfibólicos é observada na mesma rocha, existindo termos de transição entre a anfíbola actinolítica e a horneblenda.

Acessoriamente encontram-se: esfena; clinozoizite; zoizite; opacos, em grãos frequentemente rodeados por clinozoizite e prenite; biotite, que revela substituição de natureza clorítica; apatite; e fluorite, pouco frequente. A calcite, também pouco abundante, encontra-se em plagas pouco desenvolvidas normalmente associando-se à clinozoizite. Óxidos de ferro castanho-avermelhados estão a impregnar as rochas. Presente, em todos os tipos estudados, a scheelite nota-se sob forma de pequenos grãos, não ultrapassando 0,1 por cento.

Anfibolitos

Associando-se às corneanas há uma fina bancada, com possança média de 10 cm, formada por uma rocha de natureza anfibolítica sem foliação evidente e que revela tonalidade cinzenta esverdeada com capas exteriores de tom castanho avermelhado resultantes de alteração.

Microscopicamente a alternância de faixas anfibólicas e quartzo-plagioclásicas confere à rocha uma foliação; a textura é granoblástica com tendência a porfirogranoblástica e resultante do desenvolvimento de cristais de quartzo e de anfíbola que sobressaem no seio de uma matriz de natureza plagioclásica (fot. 1).

Plagioclase — Uma profunda alteração do mineral tende a esbater e a apagar os contornos dos cristais, que passam a constituir uma matriz onde são predo-

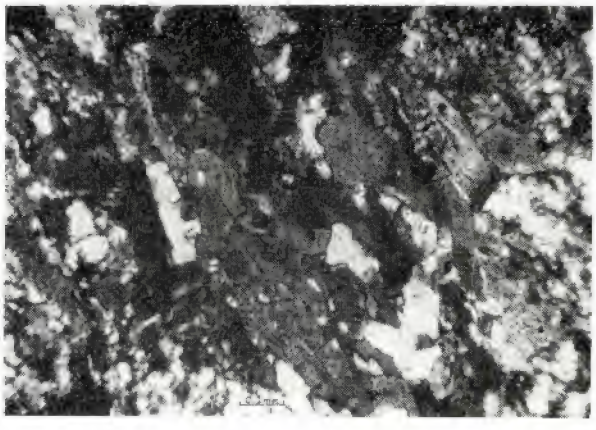
FOT. 1

Aspecto textual de anfibolito com anfibolas, quartzo e plagioclase, além de esfena e opacos (n +)

minantes agregados sericíticos e materiais argilosos. Por vezes, podem observar-se esboços de maclas que permitiram determinar uma composição labradorítica (An 60).

Quartzo — Cristais granulares, que podem atingir dimensões até 5,2 mm, formam faixas paralelas com estrutura em mosaico, onde a extinção é marcadamente ondulante e as fracturas pronunciadas.

Anfíbola — Ocorre em cristais de hábito prismático ou poligonal formando agregados que definem bandas incipientes segundo a foliação da rocha. Dimensões máximas dos cristais da ordem de 1,04 mm. Trata-se de horneblenda de cor castanha esverdeada (ng) até castanho amarelado (np) com ângulos de 24° c∧ng. Os cristais revelam no entanto com frequência coloração zonada com manchas irregulares ou periféricas de tom verde azulado; o mineral tem, então, aspectos fibrosos com cor variando entre verde azulado pálido (ng) e verde amarelado (np» (fot. 2).



FOT. 2

Anfibolito com anfíbolas envolvidas por matriz plagioclásica profundamente alterada (n +)

Clinopiroxena — Grãos de dimensões reduzidas parcialmente corroídos e substituídos por óxidos de ferro de modo tão profundo que do mineral podem apenas restar núcleos. Trata-se de uma piroxena diopsídica de tom verde muito pálido.

Como acessórios referem-se apatite; esfena-leucoxena, em grãos de dimensões inferiores a 0,8 mm; clinozoizite; zoizite; e biotite, de cor castanha avermelhada (ng) até castanho pálido (np), que pode ser parcialmente substituída por clorite; opacos em grãos, podendo revelar estruturas em «corona», com faixas de esfena; scheelite, também em pequenos grãos, em percentagem reduzida e finamente disseminada.

BANIDO

Na região de Banido, perto de Cabeceiras de Basto, na estrada que desta vila se dirige para Venda Nova, num pequeno retalho xistoso de idade silúrica e no seio do granito, situa-se um afloramento de corneanas calco-silicatadas com estrutura possível em sinforma em que a aba leste possui as coordenadas D = N 30° W, i = 40° SW e a aba oeste D = N 35° W, i = 35° NE.

O afloramento, pouco visível, pode ser seguido numa extensão de 250 metros e deverá constituir o extremo da grande mancha escarnítica que se estende para norte e será posteriormente estudada.

Macroscopicamente trata-se de rochas com tonalidades verde azuladas a verde acizentadas, por vezes com manchas de aspecto fibroso, e marcadas por foliação pouco acentuada.

Ao microscópio as rochas mostram texturas grano a porfirogranoblásticas, sendo observável uma foliação que pode ser marcada por faixas essencialmente quartzo-feldspáticas alternantes com outras de composição piroxénica.

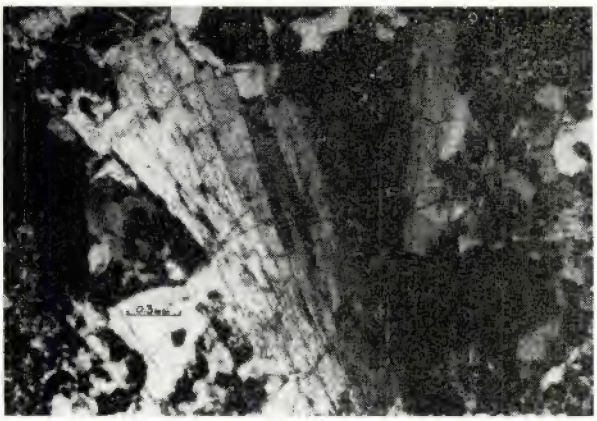
Plagioclase — Sempre presente em todos os tipos, embora normalmente acusando profunda substituição por agregados sericíticos. Revela estrutura zonada irregular ou com núcleos mais cálcicos, e as geminações segundo a lei da albite apenas estão esboçadas. O mineral constitui agregados granulares (dimensões médias de 0,09 mm) ou revela formas prismáticas (dimensões máximas de 0,87 mm). Trata-se de labradorite com percentagens anortíticas variando entre 54 e 68 por cento.

Quartzo — Mineral frequente sob a forma de agregados granulares com dimensões variando entre 0,04 e 0,7 mm, esporadicamente atingindo dimensões da ordem dos 2,6 mm, por vezes com aspecto estirado segundo a foliação das rochas. Os cristais mais desenvolvidos revelam extinção ondulante e contornos frequentemente amibóides.

Clinopiroxena — Pode encontrar-se em pequenos grãos associados à plagioclase (dimensões médias de 0,04 mm), ou mostrando tendência a desenvolvimento e formas prismáticas corroídas (dimensões médias de 0,78 mm, podendo atingir 1,8 mm). Trata-se de uma piroxena diopsídica praticamente incolor a muito levemente esverdeada, com estrutura poiciloblástica devida a abundantes inclusões de opacos e plagioclase. Uma substituição por clinozoizite é detectada frequentemente, podendo ser acompanhada por alteração clorítica. Ângulos médios de extinção de 44° c∧ng. Uma substituição por anfíbola verde a partir da periferia pode afectar os cristais.

Anfíbola — Mineral não detectado em todas as rochas analisadas, pode no entanto associar-se à piroxena sob a forma de pequenas lamelas (dimensões entre 0.11 e 0,2 mm). Tem cor verde levemente azulada (ng) a amarelo esverdeado (np) e ângulos de extinção da ordem dos 16° c∧ng. Trata-se de uma anfíbola actinolítica, que revela por vezes coloração desigualmente distribuída com manchas de verde mais acentuado (ng) até amarelo esverdeado (np).

Idocrase — Este mineral ocorre nalguns dos tipos estudados, normalmente em formas prismáticas (atingindo até 4 mm) e concentrando-se em faixas. Os cristais são fortemente corroídos pela matriz plagioclásica (fot. 3).



FOT. 3

Cristal plumoso de idocrase limitado por clinozoizite (n +)

Granada — Associando-se à idocrase, encontra-se em cristais levemente acastanhados com abundantes inclusões de opacos e quartzo revelando substituição por calcite.

Acessoriamente podem indicar-se: fluorite, em manchas irregulares: microclina, referida nalguns dos tipos estudados e resultando da substituição da plagioclase; esfena, em cristais rômbicos (dimensões entre 0,04 e 0,35 mm) que podem mostrar cor intensamente avermelhada; clinozoizite; zoizite; apatite; opacos; e scheelite em grãos corroídos pela matriz, ocasionalmente atingindo 0,95 mm.

ZONA DA VENDA-NOVA

Sob esta designação incluem-se vários afloramentos de rochas calco-silicatadas intercaladas em xistos de idade silúrica nas proximidades de rochas granitóides.

As ocorrências situam-se nas cartas topográficas à escala 1:25 000 n.os 44 e 45 e localizam-se mais concretamente próximo da povoação de Pomar da Rainha, junto à barragem da Venda-Nova e no Cerdedo.

No primeiro caso trata-se de camadas cuja possança não ultrapassa 20 cm, com direcções variando entre N 60º W e N 80º W, inclinando entre 50º e 65º NNE, mais raramente subverticais.

O afloramento próximo da barragem, mais importante em extensão e desenvolvimento, é formado por uma série de leitos paralelos com possanças médias da ordem dos 20 cm; a direcção das camadas varia entre N 50º W e N 70º W, e as inclinações entre 10 e 32º NE. A noroeste da barragem, na estrada que da Venda Nova se dirige para Paradela, filões aplito-pegmatíticos acompanham finas bancadas de natureza calco-silicatada que se revelam lenticulares e morrem contra o granito encaixante. Neste caso a atitude das camadas revela coordenadas com a direcção variando entre N 60º W e N 70º W, inclinando entre 60º e 70º NE.

A existência de tais níveis calco-silicatados tinha já anteriormente (1975) sido detectada por um dos autores (BARROS, A.), durante trabalhos de prospecção há anos iniciados: tais unidades foram objecto dum estudo efectuado por NORONHA, F. (1976), que refere a ocorrência de scheelite em calco-silicatadas da zona da Borralha.

Como a rocha xistosa encaixante revela características idênticas relativamente aos diferentes afloramentos estudados, passaremos a referir de modo genérico a respectiva composição.

Os tipos calco-silicatados estão intercalados em micaxistos moscovítico-biotíticos com granada e clorite, que macroscopicamente revelam tonalidades acastanhadas, aspecto brilhante e xistosidade marcada mas que uma clivagem de crenulação afecta de modo pronunciado.

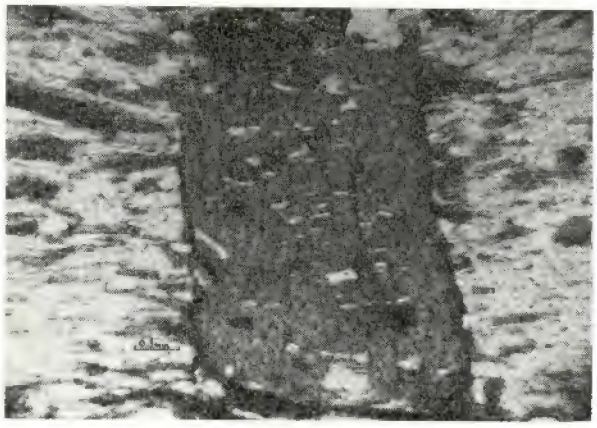
A textura revela-se lepidoblástica a granolepidoblástica, podendo passar a porfiroblástica.

O componente mais abundante é a moscovite, normalmente presente em cristais prismáticos associados a secções basais sem formas definidas.

A biotite ocorre em quantidade subordinada revelando cor castanha (ng) até castanho amarelado (np).

O quartzo, menos abundante, encontra-se em grãos que podem assumir dimensões máximas de 1,04 mm, formando lentículas perfeitamente contornadas pelos minerais micáceos.

Cortando a xistosidade, há cristais prismáticos (dimensões média sde 1,04 mm) de clorite que evolui a partir de cristais biotíticos primitivos (fot. 4). Os cristais revelam estruturas em «Kink», normalmente acentuadas pela introdução de óxidos de ferro segundo os planos de clivagem; inclusões de minerais



FOT. 4

Clorite «cross» com inclusões de quartzo conservando alinhamento segundo S_2 (n +)

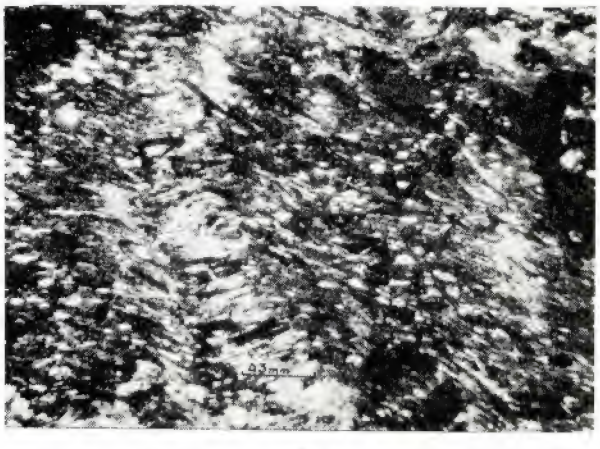
radiactivos com auréola pleocróica são também observados. Esta biotite-cross primitiva deverá ser o resultado de acções de metamorfismo de contacto produzido pelas massas granitóides.

Além da moscovite atrás referida, encontra-se outra geração de mica branca, marcada pelo desenvolvimento de finas lamelas cuja orientação corta a xistosidade principal e faz com ela ângulos próximos de 30°, e que, de acordo com NORONHA, F. (1976) traduzirá uma xistosidade S_1.

Sobressaindo sob a forma de cristais poligonais, a granada revela profunda substituição por óxidos de ferro avermelhados; os cristais contêm apenas inclusões de grãos de quartzo e opacos.

Acessoriamente são de referir cristais poligonais e pequenos prismas de turmalina de cor castanha possuindo núcleos irregulares azulados.

De acordo com NORONHA, F. e SAAVEDRA, J. (1975), três fases de dobramento afectaram as rochas da região. Nos tipos estudados essas fases estão evidenciadas, pois a xistosidade principal (S2), marcada pela disposição orientada das lamelas micácaes, assim como por bandas quartzosas, se revela afectada por microdobramentos originários de uma clivagem de crenulação (fot. 5). Os cristais de clorite-cross são posteriores a S2 pois que a estrutura poiciloblástica revela inclusões de quartzo e biotite conservando o alinhamento que define aquela segunda fase.



FOT. 5

Microdobramentos afectando a xistosidade S_2 em micaxistos (n +)

1 — POMAR DA RAINHA

Rochas calco-silicatadas (Metagrauvaques com minerais calco-magnesianos)

Estes tipos de rochas revelam-se macroscopicamente de grão fino, cor cinzento escura, donde sobressaem pontuações rosadas e manchas de sulfuretos. Não é evidente a foliação.

Microscopicamente observa-se textura granoblástica com foliação mal marcada (fot. 6).

FOT. 6

Aspecto textual de metagrauvaque calco-magnesiano com quartzo, clinopiroxenas e anfíbolas radiadas (n +)

Quartzo — É o componente principal, formando mosaico em que os contornos das secções são amibóides. Os grãos mostram dimensões variando entre 0,03 e 1,3 mm, por vezes manifestando tendência a estiramento que define foliação incipiente para a rocha. Os cristais de maiores dimensões são percorridos por fracturas e mostram extinção ondulante enquanto que impregnações de óxidos de ferro se introduziram segundo as fracturas ou moldaram os grãos.

Plagioclase — Cristais granulares intersticiais normalmente não maclados ou revelando apenas esboço de maclas, profundamente substituídos por agregados sericíticos. A sua composição varia entre labradorite (An 68) e bytownite (An 72).

Anfíbolas — Presentes em todos os tipos estudados, ocorrem sob a forma de lamelas normalmente dispostas em rosetas de terminações aciculares. Na maior parte dos casos trata-se de actinolite, incolor e verde levemente amarelado (ng) até amarelo esverdeado (np) ,podendo revelar manchas azuladas desigualmente distribuídas. Os ângulos de extinção são próximos de 12° $c \wedge ng$.

Nas rochas, contudo, pode encontrar-se outra anfíbola de cor castanha, levemente esverdeada (ng) até castanha amarelada (np). Trata-se neste caso de horneblenda, devendo existir termos de transição entre os dois tipos anfibólicos.

Diópsido — Apenas representado num dos tipos estudados,, este mineral ocorre em cristais incolores profundamente recortados e destruídos com substituição acentuada por clinozoizite e calcite. Ângulos de extinção de 42° $c \wedge ng$.

Granada — Mineral sempre presente nas rochas, em cristais parcialmente limitados por faces planas, mas revelando mais tendência a desenvolvimento intersticial, podendo alongar-se segundo a xistosidade S2. No crescimento engloba os restantes componentes

O homem e a técnica

O homem desenvolveu a técnica, ao ritmo da sua própria evolução. Criou técnicas que lhe permitiram dominar e transformar a Natureza.

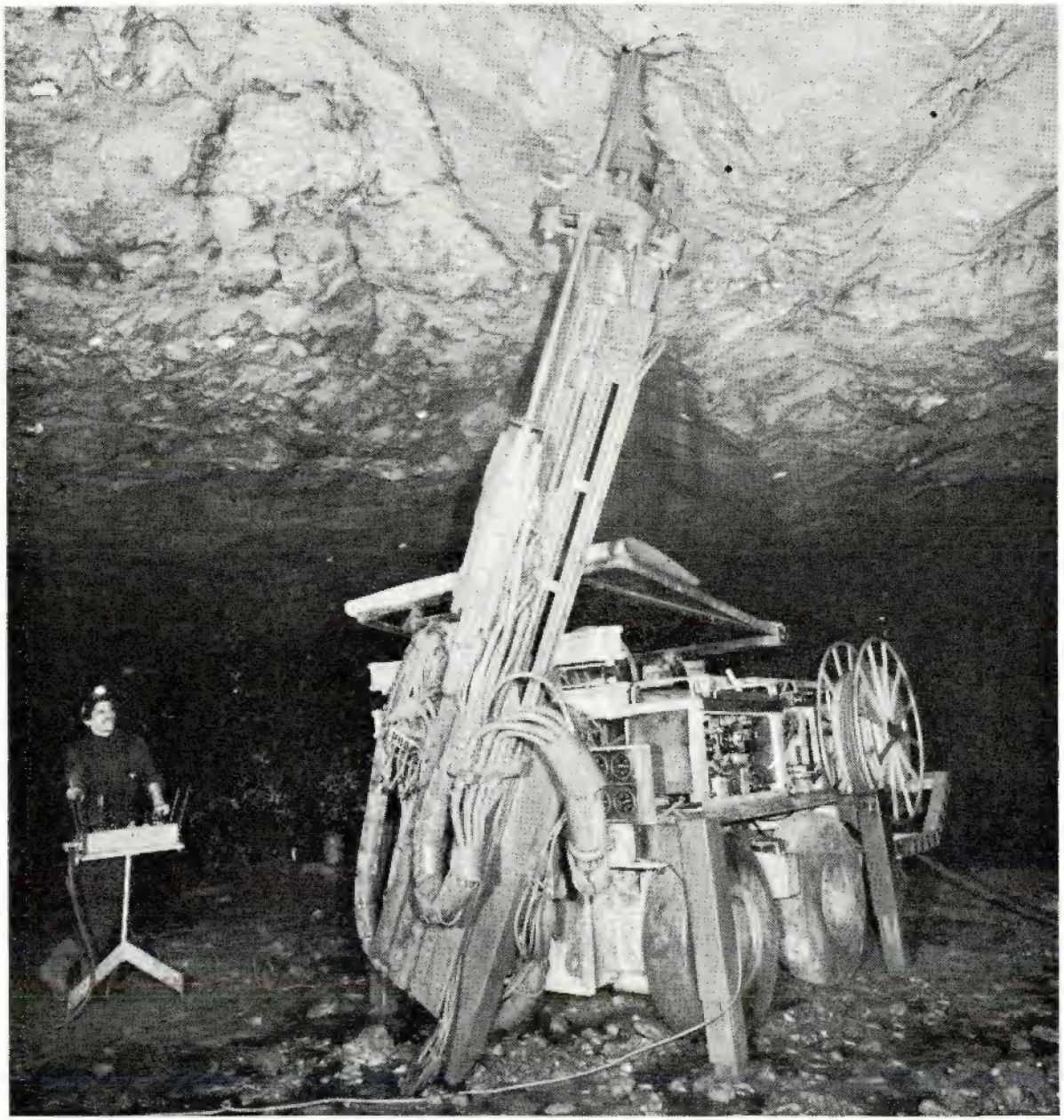
Comunicar com outros pontos geográficos e aproveitar os recursos naturais foram necessidades a que soube responder progressivamente.

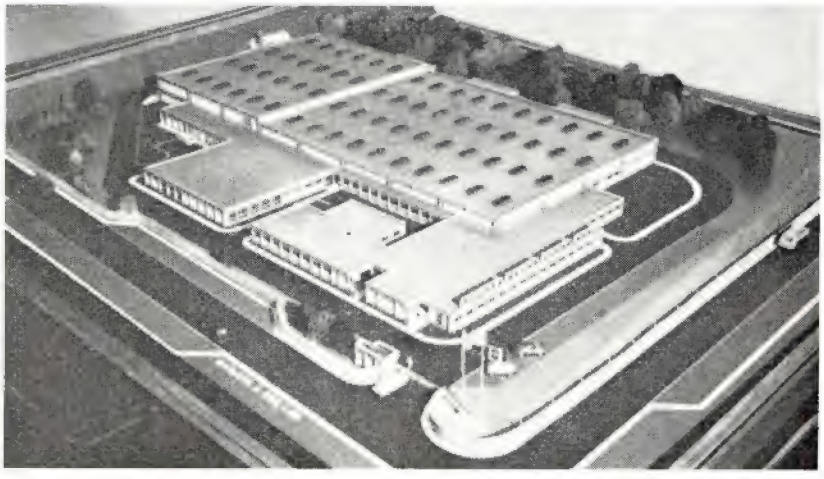
Fez caminhos, abriu estradas, navegou por rios e oceanos. Atingiu a navegação aérea e lançou-se na conquista do espaço. Construiu diques e barragens, centrais térmicas e nucleares.

Deu passos importantes no campo do conhecimento científico e tecnológico.

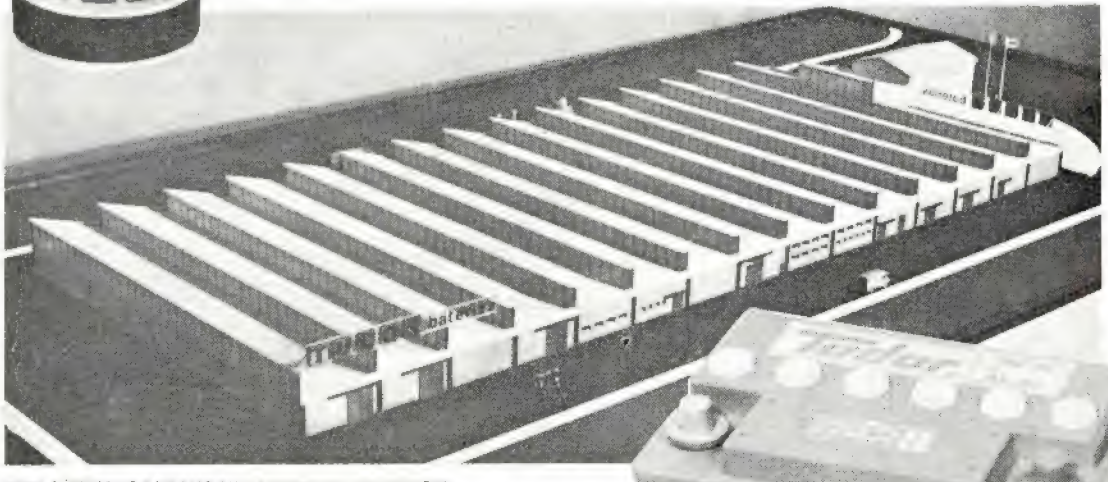
A Atlas Copco acompanha a evolução. Fornece "know-how", técnica e equipamento no campo do ar comprimido e da hidráulica.

Atlas Copco





NOVA FÁBRICA DE PILHAS EM COLARIDE (CACEM)



NOVA FÁBRICA DE BATERIAS EM CASTANHEIRA DO RIBATEJO

Tudor®

novas fábricas
novas pilhas
novas baterias

Tudor® uma empresa virada para o futuro

da rocha, particularmente quartzo e plagioclase, pelo que resultam aspectos fortemente poiciloblásticos. Alteração para clorite ocupa parcialmente os cristais, que podem também ser substituídos por clinozoizite e penetrados por fibras actinolíticas (figs. 3 e 4).

FIG. 3

Fibras radiadas de anfíbola actinolítica penetrando profundamente cristal de granada. Matriz envolvente de quartzo e plagioclase, além de esfena (luz nat.)

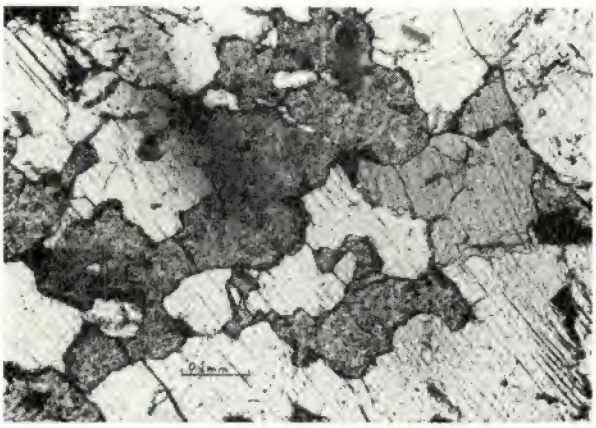
FIG. 4

Cristal de granada poiciloblástica com inclusões de quartzo e lamelas de actinolite que também surge em rosetas na rocha (luz nat.)

Como acessórios podem referir-se: zircão; clinozoizite; opacos, que podem ser rodeados por faixas de clinozite; scheelite, de tons levemente amarelados, pode ocorrer em pequenos grãos dispersos na rocha, parecendo revelar certa tendência à associação com a esfena, também se encontrando em cristais de boas dimensões no seio da piroxena (fots. 7 e 8), mas noutros casos ainda revela tendência à associação a faixas de quartzo onde este mineral forma mosaico com cristais assumindo grande desenvolvimento (fot. 9).

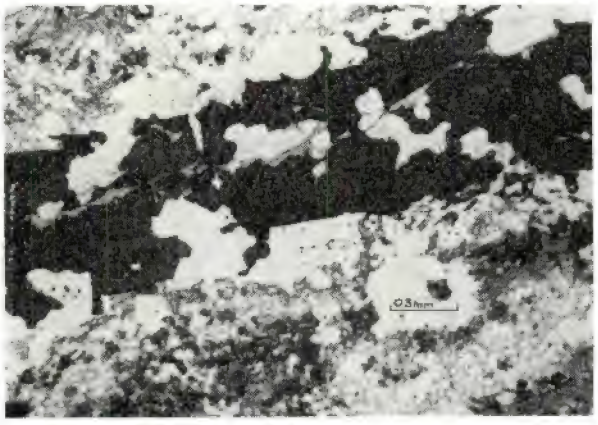
FOT. 7

Grande cristal de scheelite fracturado, no seio de piroxena diopsídica (luz nat.)



FOT. 8

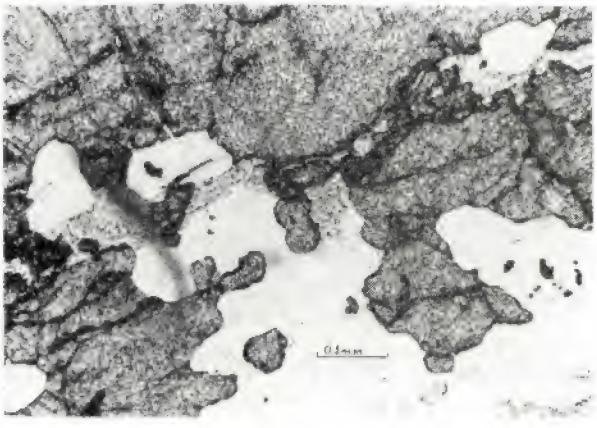
Cristais de scheelite no seio de piroxena diopsídica (luz nat.)



FOT. 9

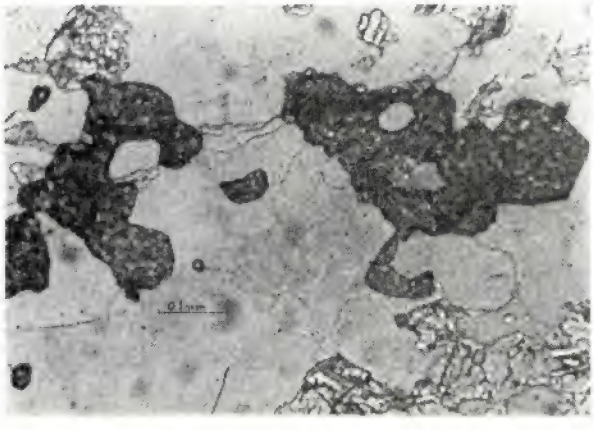
Cristais de scheelite desenvolvendo-se segundo um veio onde o quartzo assume grande desenvolvimento (luz nat.)

A scheelite dispõe-se então alongando-se segundo a foliação da rocha e tende a revelar aspectos idiomorfos, particularmente marcados nos cristais de dimensões mais reduzidas; mas mesmo nos cristais de maior tamanho mostra tendência ao desenvolvimento de limites rectilíneos, definindo-se em parte formas quadráticas (fots. 10 e 11).



FOT. 10

Cristais de scheelite desenvolvendo faces rectilíneas (luz nat.)



FOT. 11

Scheelite com desenvolvimento de formas idiomorfas (luz nat.)

2 — VENDA NOVA

Rochas calco-silicatadas (metagrauvaques com minerais calco-magnesianos)

Metagrauvaques que macroscopicamente se mostram de grão fino e cor cinzenta esverdeada com pontuações de tom rosado, podendo em certos casos revelar bandeamento mais ou menos definido.

Microscopicamente as rochas mostram aspectos foliados com textura granoblástica.

Quartzo — Mineral comum a todas as rochas, nota-se em grãos (dimensões entre 0,09 e 1,04 mm) formando mosaico em que os limites intergranulares se mostram rectilíneos ou lobados. Os cristais mais desenvolvidos formam agregados que sobressaem do seio da rocha.

Plagioclase — Presente nas rochas em percentagens variáveis, normalmente sob formas granulares formando finas bandas; os cristais estão profundamente substituídos por agregados sericíticos e por clinozoizite. Geminações ausentes ou mal marcadas mas que permitiram determinar composição variável entre labradorite (An 68) e bytownite (An 74).

Diópsido — Este mineral não está presente em todos os tipos de rochas estudadas, mas onde é detectado ocorre em cristais prismáticos de grande desenvolvimento (até 4,3 mm) ou com aspecto granular. De modo geral está profundamente corroído e revela impregnações abundantes de óxidos de ferro, podendo também encontrar-se substituição por calcite acompanhada por manchas de clinozoizite. É praticamente incolor e tem ângulos de extinção da ordem dos 46° $c \wedge ng$.

Anfíbolas — Minerais mais representados que a clinopiroxena, encontram-se em pequenas lamelas ou fibras (dimensões não ultrapassando 0,7 mm) com disposição que pode definir bandas paralelas contornando nitidamente os cristais de granada. Trata-se de uma anfíbola actinolítica de cor verde amarelada muito pálida (ng) que varia até tons quase incolores (np), podendo em certos casos revelar leves tonalidades azuladas. A coloração está no entanto desigualmente distribuída com núcleos de tom verde mais intenso. Ângulos de extinção variando entre 12 e 14° $c \wedge ng$.

Na mesma rocha pode também encontrar-se uma anfíbola do tipo da horneblenda com cores variando entre verde acastanhado (ng) e castanho amarelado (np), sendo de admitir a existência de termos de transição entre os dois tipos anfibólicos referidos.

Idocrase — Mineral restrito e alguns dos tipos analisados, onde se encontra em cristais prismáticos com grande desenvolvimento (dimensões máximas de 6,6 mm), limitados por faces rectilíneas perfeitamente marcadas pelo quartzo. Frequente estrutura poiciloblástica conferida por abundantes inclusões de quartzo, opacos, clinozoizite e clinopiroxena. Uma substituição por plagas calcíticas é observável.

Granada — Componente importante da maior parte das rochas estudadas, sobressai da matriz sob a forma de cristais de tonalidade creme e podendo revelar-se parcialmente limitados por faces planas. No seio dos cristais o quartzo ocorre em pequenos grãos associados à plagioclase, conferindo assim ao mineral carácter poiciloblástico. A clorite e a clinozoizite substituem o mineral, podendo ser acompanhados por calcite.

Acessoriamente citam-se: fluorite, apenas detectada nalgumas das rochas; clinozoizite; esfena; zircão;

apatite; calcite; biotite, de tom castanho avermelhado (ng) até castanho amarelado (np); clorite; scheelite, em pequenos grãos.

As rochas pertencentes a estes afloramentos revelam composições variáveis. Assim os tipos que ocorrem a noroeste da barragem, na estrada que se dirige a Paradela, mostram na sua composição a presença de fluorite a que se associa idocrase; neste caso as piroxenas são abundantes.

Tais afloramentos estão contidos em rochas xistosas onde, envolvidas numa matriz quartzo-biotítica, se destacam finas bandas paralelas de material carbonoso (grafite) que atribuem às rochas tonalidades acentuadamente escuras. O material carbonoso pode também ser revelado nas unidades calco-silicatadas que são deste modo marcadas por foliação mais evidente.

Os restantes tipos calco-magnesianos revelam macroscopicamente aspectos diferenciados onde sobressaem pontuações rosadas de granada. Efectivamente este mineral passa a ter desenvolvimento acentuado, acompanhando agora anfíbolas, tendo o diópsido deixado de ser detectado, o mesmo sucedendo à fluorite e à idocrase.

A scheelite aparece, no entanto, em qualquer dos tipos referidos.

FIG. 5

Cristal de granada com inclusões de quartzo. Este mineral ocorre também em agregados formando um veio penetrado pela anfíbola. A matriz é formada por plagioclase. Pode observar-se um cristal de zircão (luz nat.)

3 — CERDEDO

Rochas calco-silicatadas (metagrauvaques com minerais calco-magnesianos)

A mancha de Cerdedo constitui dois pequenos afloramentos de tipos idênticos aos já estudados. São ainda metagrauvaques macroscopicamente de tom cinzento com laivos esverdeados, podendo passar a tonalidades mais claras por concentrações de quartzo em veios ou lenticulas. A foliação é pouco marcada.

Microscopicamente a rocha revela aspectos idênticos aos referidos para os diferentes tipos, sendo o quartzo mineral abundante e formando faixas em que os grãos se constituem em mosaico, associando-se à plagioclase, com dimensões médias de 0,10 mm. Mas pode também o quartzo ocorrer em veios de largura máxima próxima dos 2,16 mm, tomando então os grãos maiores dimensões (0,96 mm).

A plagioclase associa-se em formas pouco desenvolvidas, com geminações muito esbatidas, e substituída por agregados sericíticos ou formando intercrescimentos mirmequíticos muito finos. Trata-se de bytownite (An 72).

A granada é abundante, podendo o seu desenvolvimento revelar aspectos de estiramento segundo a foliação e estrutura poiciloblástica profundamente marcada (fig. 5).

Dois tipos de anfíbolas estão contidos nestes tipos de rochas. Uma normalmente sob a forma de cristais rômbicos basais, entre castanho esverdeado (ng) e castanho amarelado (np), ou também em lamelas franjadas e cristais aciculares que se podem associar em rosetas, tratando-se de horneblenda. Outro tipo possui cores muito esbatidas entre verde amarelado pálido (ng) e tons amarelo esverdeados muito ténues (np), tratando-se de uma anfíbola actinolítica com ângulos de extinção médios de 14º $c \wedge ng$.

Acessoriamente referem-se: clinozoizite; zircão; apatite; esfena; opacos; e scheelite, em pequenos grãos.

ATEI

Intercalados concordantemente em micaxistos do silúrico ocorrem finos leitos paralelos de natureza calco-silicatada com direcções variando entre N 40º W e N 50º W, subverticais, em estreita faixa próxima do contacto com as rochas granitóides. A possança média das camadas não ultrapassa 40 centímetros.

Rocha encaixante:

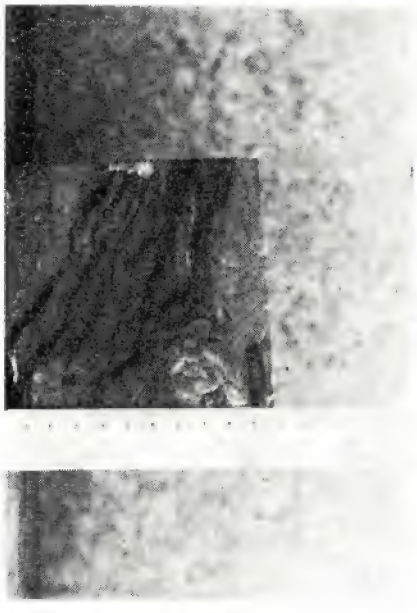
Trata-se dum micaxisto macroscopicamente de tom acastanhado, com xistosidade bem marcada e em que o quartzo sobressai ao formar amígdalas.

Ao microscópio a rocha revela textura granolepidoblástica, com o quartzo formando mosaico de grãos de dimensões médias da ordem dos 0,3 mm. Este mineral pode, no entanto, assumir grande desenvolvimento com cristais associados em amígdalas; neste caso a dimensão máxima dos grãos atinge 4 mm, revelando-se os contornos intergranulares frequentemente engrenados e a extinção ondulante.

Dispondo-se como lamelas finas em faixas paralelas que contornam as amígdalas quartzosas, a moscovite ocorre em abundância, a ela se associando pequenos grãos de turmalina, zircão e opacos, enquanto que óxidos de ferro castanho-avermelhados penetram a rocha.

Rochas calco-silicatadas:

Macroscopicamente trata-se de rochas de grão fino e cor cinzenta esverdeada, por vezes adquirindo tonalidades violáceas onde sobressaem pequenas pontuações de sulfuretos. Uma foliação marca-se nalguns tipos, sendo observáveis microdobras (fot. 12).



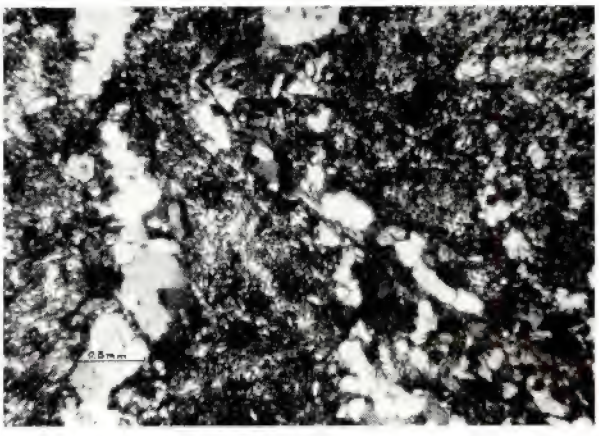
FOT. 12

Aspecto macroscópico de rocha calco-silicatada com dobras mesoscópicas

Ao microscópio as rochas mostram textura granoblástica a porfirogranoblástica; a foliação é bem evidente, podendo evidenciar-se microdobramentos bem definidos. Nestes casos a litagem é marcada pelo desenvolvimento de finas bandas constituídas por agregados de quartzo que alternam com faixas de plagioclase finamente granular (fot. 13).

Duas fases de deformação podem ser evidenciadas nestes casos: uma S1, coincidente com a estratificação So, marcada pelo desenvolvimento de finas lamelas de biotite (I) alinhadas segundo os microdobramentos, que é ainda reforçada por pequenos grãos de esfena dispostos alinhadamente. Uma segunda fase S2 levou ao dobramento dos leitos e à formação duma biotite (II) alinhada segundo a direcção dos planos axiais das microdobras (fig. 6).

Desenvolvimento posterior de anfíbolas englobou estas biotites; e influências de carácter metassomático marcam-se pelo aparecimento de microclina (fig. 7).



FOT. 13

Microdobramentos em rocha calco-silicatada formados por leitos de quartzo (n ×)

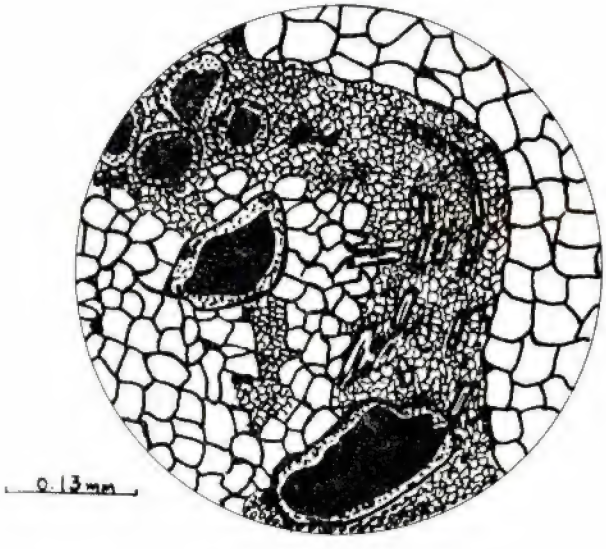


FIG. 6

Franjas de esfena rodeando grãos de opacos. Nota-se o microdobramento marcado pela alternância de associações de quartzo com bandas feldspáticas mais finas. Lamelas de biotite (I) são concordantes com a estratificação (nic. +)

A textura é granoblástica a porfirogranoblástica.

Quartzo — Sempre presente em grãos com dimensões variando entre 0,02 e 2 mm, com tendência a concentrar-se em veios ou amígdalas. A extinção é ondulante, sendo acentuada nos cristais de maiores dimensões, que também estão fracturados.

Microclina — Revela-se com frequência em grãos de dimensões variando entre 0,4 e 0,7 mm, podendo ocorrer associada ao quartzo, ou desenvolvendo-se em cristais irregulares com estrutura poiciloblástica resultante do envolvimento de grãos de quartzo e anfíbolas. Pode observar-se extinção ondulante, que confere às

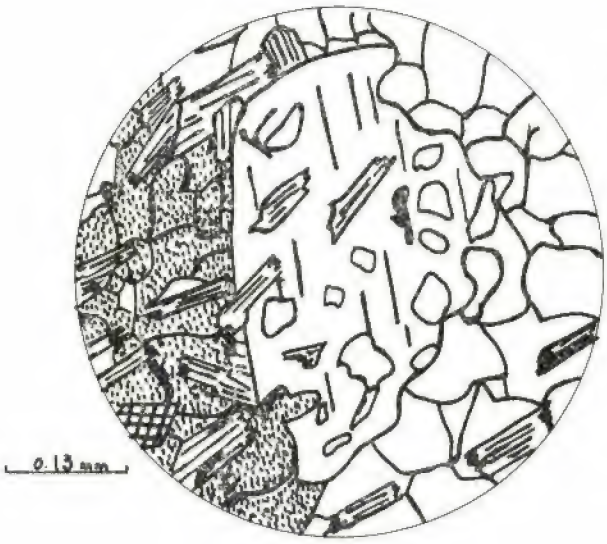


FIG. 7

Cristal de actinolite com inclusões de quartzo e biotite. Esta desenvolve-se no interior do cristal em lamelas que conservam direcção paralela a S_2 (luz nat.)

secções estrutura recticular característica. O desenvolvimento do mineral processa-se preferencialmente nas faixas onde o quartzo predomina.

Plagioclase — Cristais intensa ou completamente substituídos por finos agregados sericíticos ou plagas de clinozoizite, associando-se geralmente ao quartzo. Parte do mineral terá evoluído no sentido da microclina.

Clinopiroxena — Abundante em grãos e cristais de tendência prismática com dimensões variando entre 0,03 e 3 mm. Os cristais prismáticos dispõem se alinhadamente segundo a foliação da rocha. Mineral praticamente incolor ou muito levemente esverdeado, desenvolve estrutura poiciloblástica pela inclusão abundante de opacos e quartzo. Trata-se de uma piroxena do tipo diopsídico, com ângulos de extinção variando entre 40 e 42° $c \wedge ng$ e que pode revelar maclas segundo (100).

Anfíbolas — Abundantes nalguns tipos estudados, associando-se normalmente às faixas quartzosas estando presentes dois tipos: uma anfíbola actinolítica de cor verde azulada (ng) até verde amarelada pálido (np) e uma horneblenda cuja coloração varia entre verde levemente acastanhado (ng) e verde amarelado (np). A actinolite encontra-se normalmente com aspecto fibroso ou radiado, com fibras penetrando quartzo e feldspatos.

Acessoriamente encontram-se :biotite, pertencente a duas gerações, uma primitiva, biotite (I), ocorrendo em lamelas muito finas dispostas paralelamente à foliação e acompanhando os seus microdobramentos, e uma biotite (II) que assume formas mais desenvolvidas em pequenos prismas dispostos segundo o plano axial das microdobras; clinozoizite; apatite; e opacos, sob a forma de grãos, que podem atingir acentuado desenvolvimento (1 mm), com frequência envolvidos por franjas de prenite e clinozoizite; esfena, sob a forma de finos grãos dispostos segundo S1, enquanto que uma geração posterior do mineral corta a foliação da rocha; clorite, em pequenas lamelas; e scheelite, em grãos pouco desenvolvidos e em reduzida percentagem.

ASPECTOS GENÉTICOS

Em todos os afloramentos as rochas calco-silicatadas estudadas se revelam em bancadas pouco espessas intercaladas concordantemente em retalhos xistosos envolvidos por rochas granitóides.

Aspecto visível em Insalde e no Extremo é a transição entre as corneanas calco-silicatadas e rochas anfibolíticas, particularmente assinalável na primeira ocorrência. Aqui a evolução pode acompanhar-se pela existência de termos intermédios e inicia-se pela progressiva substituição dos cristais diopsídicos sobre os quais se decalca uma anfíbola verde azulada; este mineral passa a acompanhar-se por outra anfíbola de tom castanho e nas rochas tipicamente anfibolíticas a clinopiroxena revela-se esporádica e com características residuais, enquanto que o quartzo, amplamente representado nos leitos escarníticos, passa a componente acessório nas rochas anfibolíticas.

A proximidade das massas granitóides envolventes indicará a influência destas rochas responsáveis por acções de pirometassomatismo que levariam a uma evolução de níveis calcário-dolomíticos previamente existentes e já metamorfizados por acções regionais. O aparecimento de formações aplito-pegmatíticas associadas aos tipos calco-magnesianos em consideração, como acontece por exemplo na zona de Venda Nova, poderá indicar conexão metassomática com tais tipos de rochas e relacionação com fases últimas ligadas à implantação das massas granitóides.

As rochas calco-silicatadas da região da Venda Nova constituem dentre os tipos analisados uma fácies particular; trata-se de metagrauvaques, composicionalmente semelhantes aos referidos por TORRE DE ASSUNÇÃO, C. (1969), e poderão englobar-se, de acordo com este autor, numa subfácies do tipo misto por conterem simultaneamente quartzo, epídoto e anfíbolas.

Estes tipos da Venda Nova são também referidos por NORONHA, F. (1976), ainda que de maneira mais genérica do que no estudo agora elaborado. Este autor atribui uma origem relacionada com metamorfismo regional para a scheelite ocorrendo em tais tipos de rochas, afastando qualquer influência post-magmática e relacionando as ocorrências com concentrações de tungsténio associadas aos estratos.

O mesmo autor não refere, no entanto, a existência de fluorite em qualquer das rochas estudadas o que o presente estudo assinala, e que indicará influên-

cias importantes de fluidos. Esta transferência de fluidos poderá também ser reconhecida pelo aparecimento de turmalina nos micaxistos que englobam os níveis calco-silicatados. Este mineral, de tonalidades castanho-amareladas, deverá conter percentagens elevadas de ferro e talvez manganésio se atendermos aos núcleos de cor azulada. O seu aparecimento estará ligado principalmente a emanações de boro na dependência das granitóides.

Por outro lado a existência de opacos principalmente constituídos por pirrotite, pirite, ilmenite e também calcopirite poderá indicar que a formação das rochas calco-silicatadas estará relacionada com transferência de elementos (DUONG, P. K., 1969).

No entanto o aspecto mais notável e relativo a uma origem tardia da scheelite ligada a possível fase hidrotermal poderá ser a ocorrência daquele mineral associado a bandas em que o quartzo assume desenvolvimento acentuado e onde a scheelite apresenta idiomorfismo (fots. 10 e 11).

BIBLIOGRAFIA

Duong, P. K. (1969) — *Skarns et minèralisations associées.* Chronique des Mines et de la Recherche Minière, n.os 297 e 388, pp. 292-311 e 339-360.

Noronha, F. (1976) — *Niveaux à scheelite dans la zone tungstifère de Borralha. Leur importance metallogénique.* Publicações do Museu e Laboratório Mineralógico e Geológico da Faculdade de Ciências do Porto — 4.ª série, n.º LXXXVII, pp. 7-15.

Noronha, F. e **Saavedra, J.** (1975) — *Estudo petrológico e tectónico da área tungstífera de Borralha (Norte de Portugal).* Congr. Ibero-Amer. Geol. Econ. (2.º — Buenos Aires), vol. 5, pp. 255-280.

NOTICIÁRIO

(Continuação da pág. 212)

MINISTÉRIO DA INDÚSTRIA E ENERGIA

LNETI — Laboratório de Engenharia e Tecnologia Industrial — Centro de Formação Técnica

Próximos Seminários:

PRODUÇÃO INDUSTRIAL E INFORMÁTICA (Ciclo)

O objectivo deste ciclo é demonstrar como a Informática pode contribuir eficazmente na resolução dos problemas da Produção colaborando no planeamento, optimizando custos de produção, alertando para situações anormais, etc.

INTERESSADOS — Dirigentes e Quadros do Sector da Produção.

Seminários incluídos no ciclo:

PI.01 — Conceitos Básicos de Computadores	19 a 21 MAR/80
PI.02 — Modelos Matemáticos na Produção Industrial	28 a 30 ABR/80
PI.03 — Concepção e Instalação de um Sistema Informático de Gestão e Controle de Produção	28 a 30 MAI/80
PI.04 — Aplicações Industriais dos Computadores	25 a 27 JUN/80

DURAÇÃO — 4×15 horas — IDIOMA — Português

HORÁRIO — 14.30 - 17.30 h — LOCAL — Lisboa

CONTROLE E GESTÃO DA QUALIDADE (Ciclo)

OBJECTIVOS: Apresentação e desenvolvimento de técnicas de Controle não Destrutivo e de Gestão da Qualidade, para as indústrias metalomecânicas, de construção e reparação naval, petroquímicas e de refinação de petróleo.

INTERESSADOS: Quadros dirigentes e técnicos das indústrias referidas nas áreas do Controle da Qualidade ou áreas afins.

	LISBOA	PORTO
A1 — Controle não Destrutivo — I	10 a 14 MAR/80	24 a 28 MAR/80
A2 — Controle não Destrutivo — II	14 a 18 ABR/80	7 a 11 ABR/80
B — Garantia da qualidade	5 a 9 MAI/80	14 a 18 ABR/80

DURAÇÃO: 100 horas — IDIOMA: Português

Este ciclo é promovido em colaboração com o Instituto de Soldadura e tem o apoio financeiro da UNIDO.

Para informações mais detalhadas contactar o
LNETI — Centro de Formação Técnica — Rua Filipe Folque, 2-6.º Dt.º 1000 LISBOA — Telef. 53 36 20/3/4/5/6

(Informação do «Expresso», de 15-3-80)

(Continua na pág. 232)

Measurement of particle and gas velocities in a DC arc heater using laser doppler anemometry

D. F. G. DURÃO
A. MELLING
R. K. BAYLISS
I. G. SAYCE

ABSTRACT

The paper describes an investigation using Doppler anemometry to measure gas and particle velocities within a DC arc plasma heater, which employs magnetohydrodynamically assisted particle injection around the cathode tip. Both forward and back scatter techniques were tested using a 5 mW He-Ne laser and an 1.0 W argon ion laser. Several signal processing arrangements were also tested. A variety of particle feedstocks were used ranging in size from 1 μm to over 200 μm.

The least expensive system to yield satisfactory results employed the low power He-Ne laser in the forward scattering mode, coupled with a spectrum analyser for signal processing. Typical axial velocities within the hot zone were found to be in the range 30-150 m/s for the gas, 5-30 m/s for the feedstock particles.

SUMÁRIO

Neste artigo descreve-se o uso da anemometria do laser para medição das velocidades do escoamento e das partículas por ele transportadas num jacto de plasma D. C., o qual usa efeitos magnetohidrodinâmicos na injecção de partículas à volta do cátado. Foram testadas as técnicas de «forward» e «back» «scatter» usando laseres de 5 mW e de 1.0 W de Argon, conjuntamente com diferentes maneiras de processamento do sinal Doppler. A dimensão das partículas injectadas variava de 1 μm a 200 μm.

O equipamento mais barato de modo a fornecer resultados satisfatórios compreendia um laser de He-Ne de 5 mW usado em «forward scatter» e um analisador de frequências para processamento do sinal. As velocidades dentro da zona mais quente do jacto iam de 30 a 150 m/s para o gás e 5 a 30 m/s para as partículas.

1 — INTRODUCTION

For a fundamental understanding of the processes of heat and mass transfer occurring within a particle-laden thermal plasma, it is essential to have a knowledge of the velocities and temperatures of both gas and particles. Such information is essential if scale-up of a commercially promising process is to be undertaken on anything but an empirical basis. This paper describes a preliminary investigation of laser Doppler anemometry (LDA) as a potentially convenient technique for measuring gas and particle velocities in a high efficiency DC arc plasma heater being used for thermal processing of particulate materials.

Previous workers have measured plasma gas velocities using for example pitot probes (coupled with measurement of gas temperature) [1-3], photographic techniques [4, 5] and, more recently, an opto-electronic method [6]. The latter two approaches have also been employed to measure particle velocities [6-10], but only where the particles were radiating more intensely than the plasma. LDA offers the possibility of permitting rapid determination of the local velocities of gas and particles, even when the radiation emitted by the former is significant. Furthermore it requires no initial knowledge of the gas temperature. The technique has already been used to measure fluid flow in combustion systems [11], and transient velocities in arc circuit breakers [12], but the authors are not aware of any publication describing the measurement by LDA of gas or particle velocities in a steady state thermal plasma environment.

The LDA technique involves analysis of the frequency of signals received at a photodetector when

Manuscrito recebido para publicação em 20/7/77.

light is scattered from particles passing through the fringe pattern generated in the region of intersection of two laser beams (the sample volume). For the measurement of gas velocity the gas is typically seeded with particles of around 1 μm diameter, small enough to follow the turbulent velocity changes in the gas streams. Thus it has been calculated that titania particles of 3.2 μm diameter would give an acceptable response in oxygen flows at 2800 K up to 1 kHz, while 0.8 μm particles would be necessary to indicate fluctuations in frequency of 10 kHz [11]. The present work involved seeding of argon at much higher temperatures, at which the size of the alumina particles used is likely to allow detection of velocity fluctuations up to frequencies higher than 1 kHz.

At the start of the project doubts existed as to the feasibility of introducing an adequate concentration of seed particles to the centre of the plasma column, and also as to the lifetime of such small particles in the high temperature environment. Another area of uncertainty concerned the signal to noise ratio (SNR) which might have been too low as a result of electrical interference, or background radiation from the plasma.

The present study was therefore undertaken to investigate the potential of LDA to measure gas and particle velocities in an arc heater at gas temperatures in the range 5000-20,000 K, an to define a relatively inexpensive optical configuration and signal processing equipment which might be used in a subsequent more detailed study.

2 — APPARATUS

2.1 Plasma Heater

The plasma heater is described in greater detail in another papel [13]. However for the present study the design was slightly modified, and in the interests of completeness a bried description is provided below.

A DC arc (typically 260 A) was maintained between a conical gas-shielded cathode (water-cooled tungsten), and the jets emerging from two plasma torches, which acted as anodes. The cathode jet was directed vertically downward, and the anodic plasma jets horizontally inward, and diametrically opposed. The cathode was shielded with argon (48 l/min), and powdered feedstocks entrained in a further argon stream (119 l/min) were injected into the plasma column, via an annular port around the cathode. Entrainment of particles into the arc column occurs via a magnetohydrodynamic effect, first noted by Maecker [14], and more recently exploited by Sheer and co-workers for vaporising refractory powders [15, 16].

The cathode tip was positioned at specific heights (in the range 2 to 40 mm) above the plane of the anodic jets. The sampling volume was also in this plane, and on the axis of the principal arc column. Traversing of the optics was not attempted, instead the change in velocity with axial distance «h» from the cathode, was determined by moving the cathode the required distance in a vertical plane.

Velocities of gas and feedstock particles were measured first in the absence and later in the presence of the arc. Cold gas velocities were monitored initially using an aerosol of silicone oil droplets (diameter about 1 μm) generated using an atomiser [11], and later using a suspension of fine alumina particles (La Pierre Synthetique Baikowski, GE 1, mean agglomerate size 1.5 μm) introduced at a slow rate in a carrier gas stream. The latter powder was also employed to monitor hot gas velocities. As an example of a typical free-flowing powdered feedstock, nickel powders (Western Mining (UK) Ltd) of various size ranges were used in measurements of particle velocity. The particle size analysis of powder A, full size range, is as shown below:

μm	+ 147	+ 104	+ 74	+ 44	+ 37	− 37
wt %	0.0	5.0	2.6	58.0	25.6	8.8

Powder B was the same powder sieved to remove particles greater than 53 μm, and powder C was a coarser nickel powder in the range 150-210 μm. Typical nickel feedrates were about 160 g/min. The aerosol and the above powders were introduced into the arc column in an argon gas stream via the outer of the annular ports which surround the cathode tip.

2.2 Laser Doppler Equipment

Two optical systems were tested, respectively employing collection of either forward- or back-scattered light. The latter offered the possibility of optical access via a single window, and potentially simpler traversing equipment. However forward-scattering (requiring two windows, and optical equipment on both sides of the test section) offered the prospect of higher SNR at low laser power.

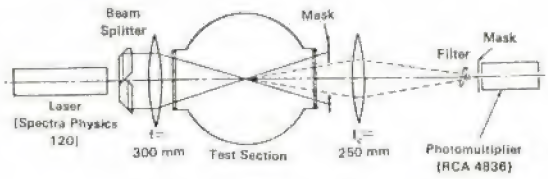


FIG. 1

Schematic diagram of forward scatter optical system

The forward-scatter system is illustrated in Fig. 1. The beam from a 5 mW He-Ne laser (Spectra Physics Model 120, $\lambda = 632.8$ nm) was split into two parallel beams with separation 50 mm using a prism beam splitter. The beams were focussed with a lens to intersect at their waists on the axis of the arc column. The calculated sample volume of the region of fringes so formed was 0.37 mm diameter, and 4.5 mm long. The half angle between the beams was 4.8° giving a

fringe spacing of 3.8 μm. The relationship between Doppler frenquency ν_D (MHz) and velocity U (m/s) is thus $U = 3.8\ \nu_D$.

Scattered light was collected using a lens, masked to prevent transit of the unscattered laser, and the collection system was adjusted so that only light scattered from the sample volume passed through the aperture (0.55 mm) of the photomultiplier (RCA Model 4836). To minimise ingress of radiation from the arc, an interference filter of bandwidth 1 nm was located in front of the photomultiplier, and oriented to maximise transmission at λ=632.8 nm. Optical access to the plasma, which is operated within a water-cooled vessel, was by means of two diametrically opposed quartz windows which were gas-purget to prevent deposition of fume.

In the back-scatter system (not illustrated) a higher power laser (Spectra Physics argon ion 164-06, λ= =488 nm) was also used with a half angle between the beams of 5.6°, a fringe spacing of 2.48 μm, and a sample volume of 0.16 mm diameter and 1.59 mm long. An EMI 9815B photomultiplier was used as the detector, and a filter centred on 488 nm (bandwidth 2.2 nm) was located in front of the detector aperture to reduce direct radiation from the arc column.

Three types of signal processor were tested; a spectrum analyser, a frequency tracker, and a frequency counter, but only results from the first of these instruments (which operated the most successfully in this situation) will be presented. The spectrum analyser (Hewlett Packard 8552A RF Section, 8553 IF Section, 141T Mainframe) was linked to a special subunit [17] which counted the pulses occurring in a given period over a selected bandwidth during the stepwise sweeping of the frequency spectrum. It operated well, even at low SNR and infrequent particle arrivals in the test volume. Although a period of some 5 minutes was required to achieve a typical velocity distribution, this requirement presented no difficulties in the present work, in which it was assumed that particle feed rate and velocity distribution remained constant over this period.

While the tracker (Cambridge Consultants Model CC01), and counter (Hewlett Packard Model 5360A), appeared unsuitable for immediate and reliable use, it is probable that with adequate modifications and validation procedures (e. g. by using a microcomputer making statistical analysis of the individual frequency measurements), either instrument could be made suitable, and could in principle provide more rapid and reliable velocity information than the spectrum analyser.

3 — RESULTS AND DISCUSSION

The LDA system was tested with back- and forward-scattered light, and with and without the arc. Using back-scattering and the 164-06 laser, cold gas velocities were measured without difficulty, but in the presence of the arc the SNR was too low, even when using the laser at full power. As it appeared that the backgroung radiation from the plasma at 488 nm was far greater than at 633 nm, the He-Ne was tested in the back scatter mode, but the SNR was still too low for detection of the Doppler signal. The use of a narrower interference filter or a monochromator with a more powerful He-Ne laser might have enabled the backscatter technique to be used.

The remaining work employed the He-Ne laser and forward-scattering. Doppler signals were observed from the silicone oil droplets in the absence of the arc, and from alumina and nickel particles both in the presence and absence of the arc. The Doppler modulation was clearly visible in all cases but the SNR was poorest for the nickel particles in the plasma. The signals would have been improved by using a narrower interference filter, or a monochromator, but the signal quality was in all cases adequate for processing using the spectrum analyser. As expected the signal bursts produced by the larger nickel particles exhibited higher intensity but smaller relative level of modulation than those arising from the smaller particles.

3.1 Measurements under Isothermal Conditions

Fig. 2 shows histograms for the axial component of velocity of both gas and nickel particles at a distance h=7 mm below the cathode tip in the absence of the arc, the gas flow being monitored using a silicone oil aerosol. The two velocity distributions have not been measured simultaneously because the high intensity scattering caused by the larger particles swamped the signal from the aerosol droplets. The nickel particles (powder A) have a much lower average velocity (7.5 m/s) than the gas (33.5 m/s), and unlike that of the gas velocity the histogram exhibits a positive skewness, suggesting that the distribution of velocities results in part from the range of particle sizes present. Some nickel particles have a size well below the mean and hence a correspondingly higher velocity. It is also possible that part of the skewness arises from the higher probability of detection of the stronger signals from the larger particles thus biasing the distribution towards the lower velocities. The turbulence intensity of the particles, (rms level of velocity fluctuation divided by mean value of particle velocity distribution), exceeds that of the gas, corresponding to varying degrees of slip between the particles and the gas. Similar effects are seen in the other histograms in Fig. 2, showing the velocities at h=10 mm of the two sieve fractions powders B and C. The two histograms, again positively skewed, scarcely overlap.

A set of histograms for the axial velocity of the cold gas, seeded with alumina, at h=2, 10, 20, 30 and 40 mm is shown in Fig. 3. The mean velocity and turbulence intensity values, given in the figure, are consistent with the annular and converging form of the jet. As far as 30 mm from the cathode the gas on the axis is accelerating. Further downstream the mean velocity decreases ,and the turbulence intensity increases (from 0.10 at 30 mm to about 0.20 at 40 mm), thus provinding evidence of mixing and of substantial shearing forces in the flow.

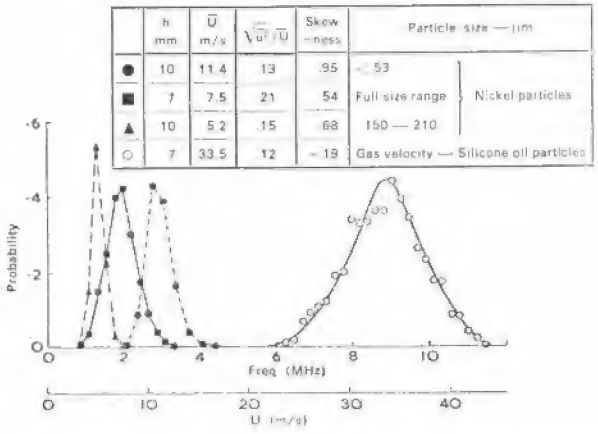


FIG. 2

Velocity distributions in isothermal flow for gas and nickel particles

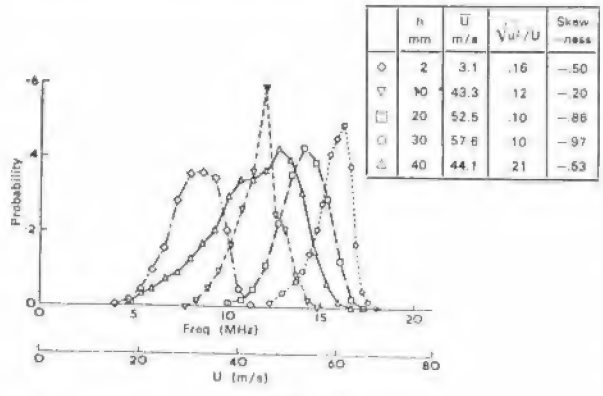


FIG. 3

Gas velocity distributions in isothermal flow using alumina seeding

3.2 Measurements in the Presence of the Arc

Gas velocity distributions, obtained by seeding the arc with alumina powder, are presented in Fig. 4.

The apparent gas velocity distributions nearer to the cathode (h=10 and 20 mm) are broad complex structures which might be interpreted as double-peaked histograms with the two most probable velocities 88 and 110 m/s at 10 mm, and 55 and 100 m/s at 20 mm. The reasons for this behaviour are at present unclear but some possible contributing factors may be mentioned. The small number of particles detected, only one fifth that observed at the lower stations, may render the results less reliable. Furthermore it is known that thermophoresis makes the introduction of fine particles (less than 10 μm) into the centre of such an arc column very difficult [15], and fluctuations in concentration of seed particles in the sample volume may have occurred. Finally the apparently anomalous behaviour may be associated with spatial variation of velocity over the length of the sample volume. Indeed Sneer and co-workers have measured temperature gradients of several thousand degrees over radial distances of around 2 mm in this region of a similar arc and, found correspondingly high rates of change of mass flow with radial distance [1].

The results at 30 and 40 mm are single peaked and more nearly symmetrical, unaffected by the unusual fluid motion or other problems occurring upstream. The mean velocity at both these positions was about 55 m/s, close to the lower peak in the distribution at 20 mm, but much lower than the average velocity nearer the cathode. Thus there was a sharp deceleration in the gas velocity between 20 and 30 mm although

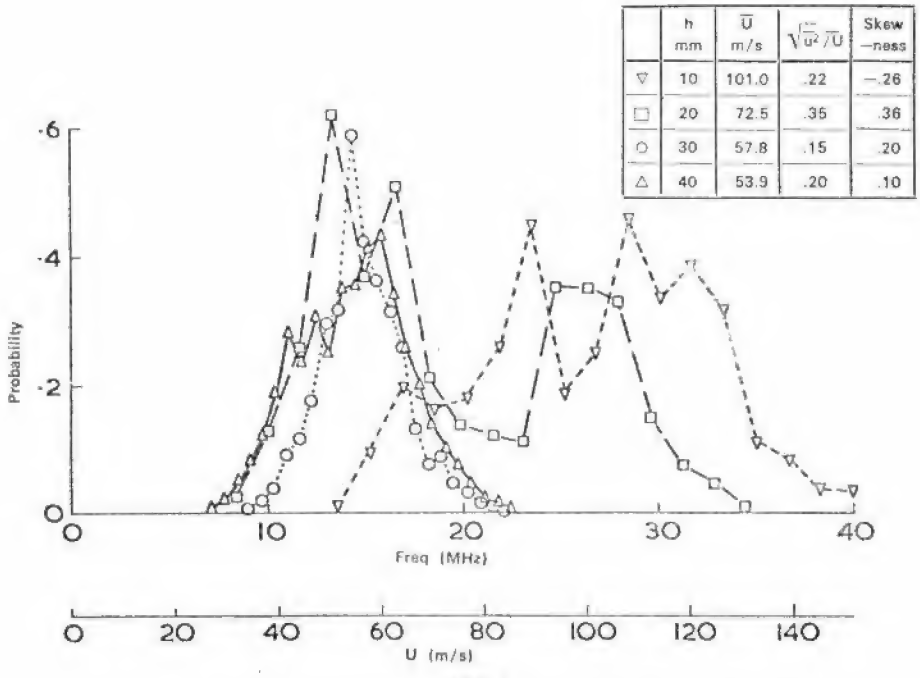


FIG. 4

Gas velocity distributions within the arc column using alumina seeding

the mean velocity at the 40 mm location was 20 % greater than that observed in the isothermal case.

In general, it can be said that the mean gas velocity curves for the isothermal and arc-operating cases have very different characteristics. The values measured in the arc column decrease with downstream distance, while those corresponding to the isothermal situation increase to a maximum at around 30 mm before decreasing further downstream. In the presence of the arc the apparent mean gas velocity 10 mm from the cathode was about 2.5 times greater than that measured under isothermal conditions. The turbulence intensity of the hot gas was also greater in the zone close to the cathode, as might be expected in view of the bimodal configuration of the velocity histograms, whilst 40 mm from the cathode the turbulence intensities were similar.

Histograms for velocity distributions of nickel particles (powder A) at h=7 to 40 mm demonstrated an increase in velocity with distance, ,and a broadening of the velocity distributions. The mean velocity rose from about 10 m/s (range 6-23 m/s) at 7 and 10 mm, to around 16 m/s (range 8-32 m/e) at 30-40 mm. The experiment was repeated with narrower particle size rangers, powders B and C, to give the velocity distributions shown in Fig. 5. As in the cold flow results (Fig. 2) the two sets of distributions scarcely overlap, and all show positive skewness. The relative difference in measured mean velocities between the hot gas (Fig. 4) and the nickel particles is greater than that observed under isothermal conditions (Fig. 2). This observation can probably be attributed to the existence of lower gas velocities in the presence of the metal particles due to the drop in temperature on injection of the nickel powder. It was not however possible during the present project to measure the gas velocity (with alumina particles) in the presence of the nickel feed, owing to the high intensity of scattering caused by the latter. The mean velocity of the larger particles (C, 150-210 μm) rises with distance in contrast to the velocity distributions for powder B (−53 μm) which are fairly similar to each other over the same distance. This is due to the different inertias of the large and small particles to follow the rapidly decelerating hot gas.

4 — CONCLUSIONS

The present brief study permitted the testing of a number of potential LDA systems for the measurement of gas and particle velocities in the arc column of a plasma heater. The use of a low power He-Ne laser, coupled with a forward-scatter optical system, and signal processing using a spectrum analyser with digitised output, led to satisfatory results, and proved to be a relatively inexpensive system. Modification of the optics to permit a shorter sample volume would be advantageous in regions of high thermal gradient. Improvement of the SNR by the use of higher laser power coupled with narrower band optical filters, carefully tuned to maximise transmission at the laser frequency would ease the signal processing and may allow the use of trackers or counters.

Preliminary measurements of the axial components oi gas and particle velocities during operation have indicated the value of the technique, which appears to merit its use to yield distributions, of vertical and

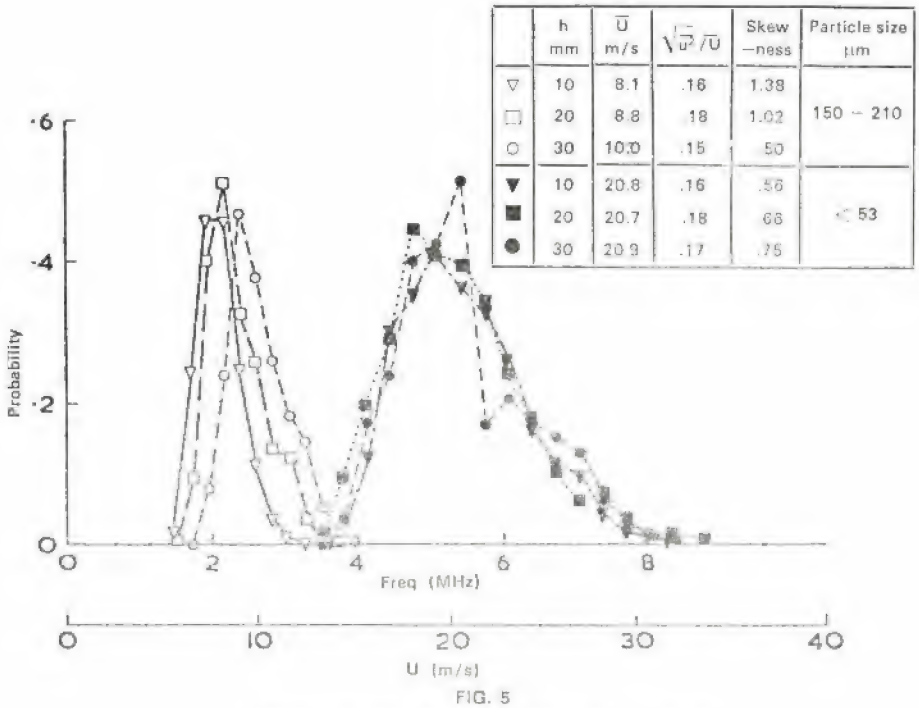


FIG. 5

Particle velocity distributions within the arc column

radial velocity components both on and off axis. In the latter case, to avoid the directional ambiguity, frequency shifting using for example an accoustoptic (Bragg) cell would appear to be appropriate.

Acknowledgement

The Authors are indebted to Professor J. H. Whitelaw for encouragement and guidance in the course of the above study.

REFERENCES

[1] **C. Sheer, S. Korman** and **S. F. Kang**, *Investigation of Convective Arcs for the Simulation of Re--entry Aerodynamic Heating*, AFOSR-TR-74, 1505, 1973.

[2] **C. Boffa** and **E. Pfender**, *Enthalpy Probe and Spectrometric Studies in an Argon Plasma Jet*, Report HTLTR No. 73, Mechanical Engineering Department, University of Minnesota, 1967.

[3] **S. Katta** and **W. H. Gauvin**, Can. J. Chem. Eng. *51*, 307-314, 1973.

[4] **C. H. Chen**, J. App. Phys., *37*, 3092-3095, 1966.

[5] **P. Meubus**, Can. J. Chem. Eng., *52*, 616-624, 1974.

[6] **D. Gold**, International Round Table, *Study and Applications of Transport Phenomena in Thermal Plasmas*, Conference Proceedings, Paper IV. 8, IUPAC/CNRS, Odeillo, France, 1975.

[7] **J. D. Chase**, J. Appl. Phys., *42*, 4870-4879, 1971.

[8] **S. V. Desai, E. S. Daniel** and **W. H. Corcoran**, Rev. Sci. Instr., *39*, 612-614, 1968.

[9] **B. Waldie**, International Round Table, *Study and Applications of Transport Phenomena in Thermal Plasmas*, Conference Proceedings, Paper IV. 9, IUPAC/CNRS, Odeillo, France, 1975.

[10] **J. A. Lewis** and **W. H. Gauvin**, A.I.Ch.E.J., *19*, 982-990, 1973.

[11] **F. Durst, A. Melling** and **J. H. Whitelaw**, *Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry*, Academic Press, London, 1976.

[12] **M. R. Barrault, G. R. Jones** and **T. R. Blackburn**, J. Phys. E. (Sci. Instr.), *7*, 663-666, 1974.

[13] **R. K. Bayliss, J. W. Bryant** and **I. G. Sayce**, *Plasma Dissociation of Zircon Sands*, Third International Symposium on Plasma Chemistry, IUPAC, Limoges, July, 1977.

[14] **H. Maecker**, Zeit. Phys., *141*, 198-216, 1955.

[15] **C. Sheer, S. Korman, D. J. Angier** and **R. P. Cahn**, *Fine Particles*, ed. W. E. Kuhn, Electrochemical Society, Princeton NJ, 1974, 133-152.

[16] **S. Korman, C. Sheer, D. J. Angier** and **H. Shaw**, ibid., 153-164.

[17] **D. F. G. Durão, J. Laker** and **J. H. Whitelaw**, *Digital Processing of Frequency-Analysed Doppler Signals*, Proceedings of LDA-75 Symposium Technical University of Denmark, Copenhagen, 1975.

(Continuação da pág. 226)

NOTICIÁRIO

NOVA FÁBRICA INTRODUZ NOVA TECNOLOGIA EM PORTUGAL

Foi inaugurada no dia 29-2-80, em Camarate, uma unidade fabril de revestimento de placas de aglomerado, a «EUROPLAC», baseada numa tecnologia ainda não existente em Portugal.

A nova fábrica, que faz parte da empresa H. BREHM — Equipamentos Industriais, S. A. 2R. L., cuja actividade teve o seu inicio em 1976, é mais um empreendimento que traduz toda a dinâmica que preside à actuação daquela empresa, que tem vindo progressivamente, desde aquele ano, a desenvolver a sua consolidação.

Iniciada como gabinete de estudos e projectos, e passando a importadora de equipamentos e ferramentas de corte para as indústrias da madeira e da cortiça, não produzidas em Portugal, a H. BREHM implantou depois uma unidade fabril metalomecânica, destinada à produção de ferramentas de corte e à montagem e fabrico de máquinas e equipamentos, que até aí vinha a importar.

Na «EUROPLAC», agora já em plena laboração após uma fase experimental, foram investidos cerca de 150 000 contos, prevendo-se resultados francamente positivos tanto no mercado interno como no externo, dada a projecção do empreendimento adentro da indústria das madeiras.

Na realidade, o produto obtido — com sucessos já confirmados noutros países — possui características específicas que permitem utilizá-lo vantajosamente — quer em termos de rapidez quer no aspecto económico — como sucedâneo da madeira natural no fabrico de mobiliário e noutros campos de vasta aplicação.

INTERBIMALL'80

7.ª Exposição internacional bienal de máquinas e acessórios para trabalhar madeira — Milão de 15-21 de Maio de 1980, no recinto da Feira de Milão.

Para informações: INTERBIMALL-76, Via Varesina — 1-20156 Milano (Italie) — Telef. 3271841-2-3-4
Telex 331215 ACIMALL I.

(Informação do «Expresso», de 8-3-80)

(Continua na pág. 238)

Notas sobre o comportamento térmico da tensão de Early e do ganho de corrente dum transistor de junção bipolar

P. L. BORGES TEIXEIRA
Universidade Técnica de Lisboa (I. S. T.)
Centro de Electrónica Aplicada das Universidades de Lisboa (I. N. I. C.)

RESUMO

Faz-se intervir a realimentação térmica na análise da dependência do ganho de corrente com a temperatura e com a polarização. Estabelece-se a distinção entre a tensão de Early interna, característica do dispositivo, e a tensão de intersecção, obtida em certas condições. Apresentam-se determinações experimentais.

ABSTRACT

The temperature and bias dependency of the current gain is discussed taking the thermal feedback inside the device into consideration. Distinction is made between an «internal» Early voltage, and an intercept voltage measured under certain conditions. Experimental results are presented.

1 — INTRODUÇÃO

A tensão de intersecção ou de Early foi introduzida por Gummel e Poon para caracterizar, de forma empírica, no modelo de carga integral **[1]**, a condutância de saída finita que se observa num transistor de junção bipolar real. A aplicação deste parâmetro estende-se a outros modelos para sinais fortes de menor complexidade, como o de Ebers e Moll **[2]**, que se encontram geralmente implantados em programas de análise de circuitos em computador **[3]**, **[4]**. Nos métodos propostos para a determinação experimental deste parâmetro **[5]**, **[6]**, são contudo aparentes algumas contradições que resultam, em nosso entender, duma definição incompleta da tensão de intersecção, ou da sua medição não ter em conta a realimentação térmica interna que tem lugar no dispositivo. Este efeito é particularmente importante para a caracterização de transistores de potência, ou de circuitos integrados lineares, como pares diferenciais, espelhos de corrente, etc. **[7]**.

2 — TEORIA

2.1 — Recapitulação

No modelo de Gummel e Poon **[1]**, a corrente de colector na zona activa directa, para a injecção em baixo nível, vem dada por

$$I_C \simeq I_S \exp\left(\frac{q}{kT} V_{BE}\right) \tag{1}$$

com

$$I_S = \frac{I_S(0)}{q_B} \tag{2}$$

$I_S(0)$ representa a corrente de saturação de referência ($V_{CB}=V_{BE}=0$), e q_B é a carga integral normalizada, que se pode escrever na forma simplificada

$$q_B \simeq 1 + q_{JE} + q_{JC} \tag{3}$$

com

$$q_{JE} = \frac{\int_0^{V_{BE}} C_{JE}(V)dV}{Q_{BO}} \tag{4}$$

e

$$q_{JC} = \frac{-\int_0^{V_{CB}} C_{JC}(V)dV}{Q_{BO}} \tag{5}$$

em que C_{JE} e C_{JC} são as capacidades das junções emissor-base e base-colector, e Q_{BO} é a carga de referência

Manuscrito recebido para publicação em 25/10/77.

de Gummel para a região da base. As expressões (4) e (5) simplificam-se, substituindo o numerador pelo seu valor médio suposto constante, ou seja

$$q_{JE} \simeq \frac{\overline{C}_{JE} V_{BE}}{Q_{BO}} = \frac{V_{BE}}{V_B} \qquad (6)$$

$$q_{JC} \simeq \frac{-\overline{C}_{JC} V_{CB}}{Q_{BO}} = \frac{-V_{CB}}{V_A} \qquad (7)$$

vindo para a tensão de intersecção ou de Early, V_A, e inversa de Early, V_B, introduzidas em (6) e (7), os valores positivos

$$V_A \stackrel{\Delta}{=} \frac{Q_{BO}}{\frac{1}{V_{CB}} \int_0^{V_{CB}} C_{JC}(V)dV} \qquad (8)$$

$$V_B \stackrel{\Delta}{=} \frac{Q_{BO}}{\frac{1}{V_{BE}} \int_0^{V_{BE}} C_{JE}(V)dV} \qquad (9)$$

que se supõem constantes e independentes de V_{CB} ou V_{BE}. Toma-se geralmente $V_{CB}=0$ para a medida de V_A, e $V_{BE}=0$ para a de V_B, donde

$$V_{AO} = \frac{Q_{BO}}{C_{JC}(0)} \quad (10) \quad , \quad V_{BO} = \frac{Q_{BO}}{C_{JE}(0)} \quad (11)$$

vindo para a corrente de colector, dada por (1)

$$I_C \simeq \frac{I_S(0)}{1 + \frac{V_{BE}}{V_{BO}} - \frac{V_{CB}}{V_{AO}}} \exp\left(\frac{q}{kT} V_{BE}\right) \simeq$$

$$\simeq \frac{I_S(0)}{1 - \frac{V_{CB}}{V_{AO}}} \exp\left(\frac{q}{kT} V_{BE}\right) \qquad (12)$$

uma vez que na zona activa directa, $(V_{BE}/V_{BO}) \ll \ll (V_{CB}/V_{AO})$. A expressão (12) caracteriza, dentro das aproximações indicadas, a dependência de $I_C(V_{CB})$ em termos do modelo de Gummel e Poon.

Lindholm **[2]** introduz uma tensão de intersecção V_A baseada na representação analítica aproximada das características de saída dum transistor real, propondo o resultado

$$\beta_F(V_{CE}) = \beta_F(0) \left(1 + \frac{V_{CE}}{V_A}\right) \qquad (13)$$

em que V_A é a tensão de intersecção comum no eixo V_{CE} do prolongamento das características de saída a I_B ou V_{BE} constante.

Pode obter-se uma expressão semelhante partindo da dependência da largura da região quase-neutra da base W com V_{CB}, que se escreve, desenvolvendo em série em torno de $V_{CB} = 0$.

$$W(V_{CB}) = W(0) + V_{CB} \left.\frac{dW}{dV_{CB}}\right|_{V_{CB}=0} + \dots \qquad (14)$$

Desprezando os termos de ordem igual ou superior à segunda no desenvolvimento (14), obtém-se

$$W(V_{CB}) \simeq W(0) \left[1 + V_{CB} \left(\frac{1}{W(0)} \cdot \left.\frac{dW}{dV_{CB}}\right|_{V_{CB}=0}\right)\right] \qquad (15)$$

e introduzindo em (15) a tensão de intersecção V_{AO} como

$$V_{AO} \stackrel{\Delta}{=} \frac{-1}{W(0)} \cdot \left.\frac{dW}{dV_{CB}}\right|_{V_{CB}=0} \qquad (16)$$

teremos

$$W(V_{CB}) = W(0) \left(1 - \frac{V_{CB}}{V_{AO}}\right) \qquad (17)$$

Admitindo em primeira aproximação que a corrente de saturação I_S varia inversamente com W (por exemplo, através da relação de Moll-Ross), resulta

$$I_S = I_S(0) \frac{1}{1 - \frac{V_{CB}}{V_{AO}}} \qquad (18)$$

idêntica a (12); por outro lado, se considerarmos que a corrente de base, na zona activa directa, é principalmente devida à injecção de lacunas no emissor, o ganho de corrente β_F varia inversamente com W, donde

$$\beta_F(V_{CB}) = \beta_F(0) \frac{1}{1 - \frac{V_{CB}}{V_{AO}}} \simeq \beta_F(0) \left(1 + \frac{V_{CB}}{V_{AO}}\right) \qquad (19)$$

idêntica a (13). As expressões (18) e (19) são válidas para uma distribuição homogénea de impurezas na região da base, suposta unidimensional, sendo portanto aproximadas num caso geral. Contudo, o grau de aproximação que se obtém é igual ao do modelo de Gummel e Poon, nas mesmas circunstâncias. Conclui-se assim que a tensão de intersecção V_{AO}, introduzida por (12) e (19), é um parâmetro constante para um dado transistor, dependente das suas dimensões, perfil de impurezas e geometria, e independente das condições de polarização e, em larga medida, da temperatura **[5], [7].**

A partir de (12), por exemplo, obtém-se para a condutância de saída g_o, com $V_{CB} = 0$,

$$g_o = \left.\frac{dI_C}{dV_{CE}}\right|_{V_{BE}} \simeq \left.\frac{dI_C}{dV_{CB}}\right|_{V_{BE}} = \frac{I_C(0)}{V_{AO}} \qquad (20)$$

que se pode empregar na medida aproximada de V_{AO}, por exemplo num traçador automático de características.

A tensão de intersecção V_{AO} determinada experimentalmente, que se passa a designar por V'_{AO}, só se apresenta no entanto constante em ensaios isotérmicos, obtidos por exemplo para valores de $I_C(0)$ pequenos, ou em regimes de impulsos com taxa de ligação reduzida. Num caso geral, V'_{AO} difere de V_{AO}, e é função das condições de polarização, e da temperatura. Dentro desta óptica, Logan **[8]**, com base em determinações experimentais efectuadas a temperatura constante, propõe para (13)

$$\beta_F(V_{CB}, I_C, T) = \beta_F(0)\ (I_C, T) + \frac{V_{CB}}{V_N} \tag{21}$$

em que a tensão V_N é constante. Lindholm **[9]** sugere para V_N a expressão

$$V_N = \frac{V'_{AO}}{\beta_F(0)} \tag{22}$$

Embora a descrição empírica (21) seja correcta, a definição (22) parece carecer de validade, até em termos estritamente qualitativos: quando T aumenta, V'_{AO} diminui e $\beta_F(0)$ aumenta, não se mantendo portanto o seu quociente constante.

2.2 — Interacção térmica

No sentido de consolidar (21) e (22), considera-se o efeito da realimentação térmica, que tem lugar no interior do dispositivo **[10]**: a temperatura da junção colector-base, função de I_C, vai alterar o valor de V_{BE}. Nas características de saída não isotérmicas a I_B ou V_{BE} constantes para a injecção em baixo nível, uma pequena variação ΔV_{CB} altera o ganho de corrente em torno de $\beta_F(0)$ de uma quantidade $\Delta\beta_F$ dada por

$$\Delta\beta_F\Big|_{V_{BE}} = \frac{\partial \beta_F}{\partial T}\Big|_{\substack{V_{CB}\\ V_{BE}}} \Delta T + \frac{\partial \beta_F}{\partial V_{CB}}\Big|_{\substack{T\\ V_{BE}}}^{V_{BE}} \Delta V_{CB} \tag{23}$$

Fazendo intervir a retroacção térmica referida, podemos escrever, em termos da potência P_C dissipada no colector

$$\Delta T \simeq \frac{dT}{dP_C}\ \frac{dP_C}{dV_{CB}}\ \Delta V_{CB} \tag{24}$$

ou seja

$$\Delta T \simeq R_\theta \cdot I_C \cdot \Delta V_{CB} \tag{25}$$

em que $R_\theta \triangleq \Delta T/\Delta P_C$ é a impedância térmica do transistor entre junção e meio ambiente, suposta resistiva, e se toma I_C como aproximadamente constante ao longo das características de saída a V_{BE} ou I_B constantes. Substituindo (25) em (23), obtém-se

$$\beta_F\Big|_{V_{BE}} = \left(\frac{\partial \beta_F}{\partial T}\Big|_{\substack{V_{CB}\\ V_{BE}}} R_\theta\ I_C + \frac{\partial \beta_F}{\partial V_{CB}}\Big|_{\substack{T\\ V_{BE}}} \right) \Delta V_{CB} \tag{26}$$

Para a variação de β_F com a temperatura, utilizam-se os resultados **[11]**, **[12]**, que se resumem a seguir. Introduzindo

$$b = \frac{1}{\beta_F}\ \frac{d\beta_F}{dT}\Big|_{T_o} \tag{27}$$

e considerando com predominante na corrente de base a injecção no emissor, pode escrever-se para (27)

$$b = -\frac{\eta - 1}{2\,T_o} + \frac{E_r}{2kT_o^{\ 2}} \tag{28}$$

em que o parâmetro η se refere à variação da mobilidade efectiva dos electrões na base com a temperatura, suposta do tipo

$$\mu_e = C\ .\ T^{-\eta} \tag{29}$$

e E_r é uma energia de referência na expressão

$$t_r = t_1\ .\ \exp\left(-\frac{E_r}{kT}\right) \tag{30}$$

em que t_r representa o tempo de vida dos electrões, referente à recombinação no volume da base. Para um transistor NPN de silício, de fabricação corrente, $N_A \simeq 10^{17} - 10^{18}\ cm^{-3}$, em média na região da base; para $T_o = 300°K$, obtém-se os valores aproximados $\eta \simeq 2$, $E_r \simeq 0{,}12eV$. Tomando como válida para a variação isotérmica de β_F com V_{CB} a expressão (19), teremos, substituindo (28) e (19) em (26),

$$\Delta\beta_F(0) = \beta_F(0)\ \left(I_C\ R_\theta\ b + \frac{1}{V_{AO} - V_{CB}} \right) \Delta V_{CB} \tag{31}$$

Consideremos seguidamente o desenvolvimento em torno do valor de referência β_{Fo}, de acordo com (21),

$$\beta_F \simeq \beta_{Fo} + \frac{\partial \beta_F}{\partial V_{CB}}\Big|_{V_{CB_o}} \left(V_{CB} - V_{CB_o} \right) \tag{32}$$

onde $\beta_F = \beta_{F_o}(I_C, T)$ para $V_{CB} = V_{CB_o}$. A partir de (31) podemos escrever, tomando como referência $V_{CB_o} = 0$, ou seja $\beta_{F_o} = \beta_F(0)$,

$$\frac{\partial \beta_F}{\partial V_{CB}}\Big|_{\substack{V_{CB_o}\\ V_{BE}}} \simeq \beta_{F_o} \left(B\ .\ I_C + \frac{1}{V_{AO} - V_{CB}} \right) \tag{33}$$

com

$$B = R_\theta \cdot b \tag{34}$$

Resulta assim a expressão geral para (31)

$$\beta_F = \beta_F(0)\ (1 + B\ P_C) + \frac{V_{CB}}{\dfrac{V_{AO}}{\beta_F(0)}} \tag{35}$$

em que $P_C = V_{CB} I_C$ é a potência dissipada no colector, e $\beta_F(0)$ é o valor do ganho de corrente para $V_{CB} = 0$, à temperatura constante de referência T_o, e independente de I_C para a injecção em baixo nível, se desprezarmos os efeitos de recombinação superficial e nas regiões de deplecção; o valor $\beta_F(0)$ é por conseguinte constante para um dado transistor. Pode chegar-se a idêntica conclusão a partir da expressão de $\beta_F(0)$ em termos dos números de Gummel do emissor e da base **[4]**

$$\beta_F(0) = \frac{GU_E}{GU_B} = \frac{D_p}{D_n} \cdot \frac{Q_{EO}}{Q_{BO}} \tag{36}$$

Por outro lado, a tensão de intersecção V_{AO} referida em (35), é introduzida por (16), a partir do atravessamento da espessura da região da base; não coincide portanto com o valor medido V'_{AO} e pode, com grande aproximação considerar-se com constante, se desprezarmos a influência da variação com a temperatura do potencial de contacto das junções, sobretudo a colector-base. Nesta óptica, o quociente $V_{AO}/\beta_F(0)$ é efectivamente constante. Tendo em conta (10) e (36) podemos ainda escrever

$$V_N = \frac{V_{AO}}{\beta_F(0)} = \frac{Q_{BO}^2}{C_{JC}(0) \cdot Q_{EO}} \tag{37}$$

A expressão (35) confirma a fórmula empírica (21), estabelecida por Logan, e apresenta para V_N um valor constante, mas que não coincide necessariamente com (22). Explicita-se também a dependência de β_F com a potência dissipada no colector, e indirectamente, com a temperatura.

Estes resultados podem apresentar-se em termos da condutância de saida g_o do transistor. Para tanto, partimos da expressão (12), podendo escrever para pequenas variações da corrente de colector

$$\Delta I_C \Big|_{V_{BE}} = \frac{\partial I_C}{\partial T}\Big|_{\substack{V_{BE}\\V_{CB}}} \Delta T + \frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}}\Big|_{\substack{V_{BE}\\T}} \Delta V_{CB} \tag{38}$$

Fazendo intervir (18) e (24) obtém-se

$$\Delta I_C \Big|_{V_{BE}} = \left[\left(\frac{1}{I_S} \frac{\partial I_S}{\partial T}\Big|_{\substack{V_{BE}\\V_{CB}}} - \frac{qV_{BE}}{kT^2} \right) R_\theta\ I_C^2 + \frac{I_C}{V_{AO} - V_{CB}} \right] \Delta V_{CB} \tag{39}$$

Para a variação da corrente de saturação com a temperatura, emprega-se o resultado **[12]**

$$\frac{1}{I_S} \cdot \frac{dI_S}{dT}\Big|_{\substack{V_{BE}\\V_{CB}}} = \frac{\gamma - 1}{T} + \frac{q}{kT^2} V_{GO} \tag{40}$$

com $\gamma \simeq 2{,}78$ e $V_{GO} \simeq 1{,}206$ V para o silício, supondo $N_A \simeq 10^{17} - 10^{18}\ cm^{-3}$. Resulta de (39) para a condutância de saida

$$g_o = \frac{\partial I_C}{\partial V_{CB}}\Big|_{V_{BE}} = \left[\frac{\gamma - 1}{T} + \frac{q}{kT^2} (V_{GO} - V_{BE}) \right] R_\theta\ I_C^2 + \frac{I_C}{V_{AO} - V_{CB}} \tag{41}$$

Podemos distinguir em g_o o paralelo de duas condutâncias: a de Early propriamente dita, $I_C/(V_{AO} - V_{CB})$, e outra, de natureza térmica, proporcional a I_C^2, nula em condições isotérmicas. Este resultado foi também obtido por Meijer **[7]**, de forma independente, que verificou experimentalmente a invariância de V_{AO} para $V_{CB} = 0$. Esta determinação vem confirmar (35).

3 — DETERMINAÇÕES EXPERIMENTAIS

No sentido de verificar (35), estabeleceu-se o seguinte programa de medidas:

a) variação isotérmica de $\beta_F(V_{CB})$, ou seja de acordo com (35)

$$\beta_F = \beta_F(0) + \frac{V_{CB}}{V_N} \tag{42}$$

Obtém-se nesta determinação o valor de V_N, constante, pela intersecção do prolongamento da característica $\beta_F(V_{CB})$ com o eixo V_{CB}, $V_{CB} = -V_{N_I}\ \beta_F(0)$.

b) variação não isotérmica de $\beta_F(I_C)$ com V_{CB} constante, isto é, de (35)

$$\beta_F = \left(\beta_F(0) + \frac{V_{CB}}{V_N} \right) + \left(B\ \beta_F(0)\ V_{CB} \right) I_C = \text{cte} + \left(B\ \beta_F(0)\ V_{CB} \right) I_C \tag{43}$$

o que permite determinar o valor de B, dado por (34), uma vez que o valor de $\beta_F(0)$ foi obtido em a);

c) traçado das características não isotérmicas $\beta_F(V_{CB})$ a I_B constante, que se comparam com as características construídas a partir dos valores de $\beta_F(0)$, V_N e B determinados em a) e b).

Seguiu-se em a) o esquema de ligações da figura 1; o ensaio realizou-se em regime de impulsos, com uma taxa de ligação de aproximadamente 1/20. Ajustou-se a amplitude dos impulsos no gerador G no sentido de manter o valor do patamar de i_B constante. A medida de β_F foi efectuada por comparação, num osciloscópio calibrado, dos valores de patamar de i_C e de i_B. Num terceiro canal mostrou-se v_{BE} como indicador de temperatura constante.

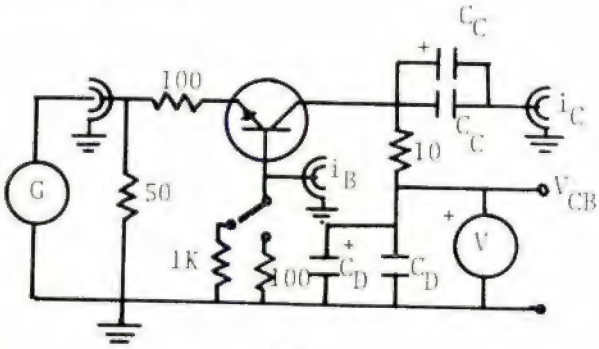


FIG. 1

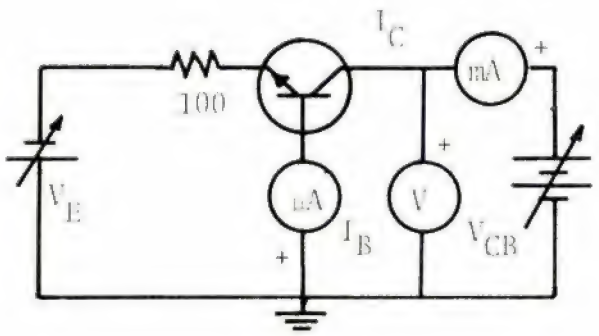


FIG. 2

Empregou-se em b) e c) o esquema de ligações da fig. 2, ajustando-se a fonte contínua V_E para manter o valor de I_B constante. Apresentam-se nas tabelas I, II e III os resultados obtidos para um transistor NPN de embalagem de plástico de baixa potência, tipo BC172C, com os valores de catálogo $V_{CEO} = V_{CBO} = 20V$, e $R_\theta = 500°CW$

TABELA I

$i_{Bp} = 5\mu A$ = cte. Ensaio a)

V_{CB}(V)	i_{Cp}(mA)	β_F
0	1,85	380
1	1,93	385
2	1,95	390
5	2,00	400
10	2,10	420
15	2,20	440

TABELA II

$V_{CB} = 2V$ = cte. Ensaio b)

I_C(mA)	β_F	I_C(mA)	β_F
0,1	380	2,0	385
0,2	381	2,5	385
0,5	380	3,0	386
1,0	383	4,0	388
1,5	384	5,0	390

TABELA III

Valores de β_F. Ensaio c)

	I_B (μA)			
V_{CB}(V)	5	10	15	20
1	390	400	410	420
2	400	410	420	430
5	420	430	440	450
10	450	480	510	530
15	490	530	580	630

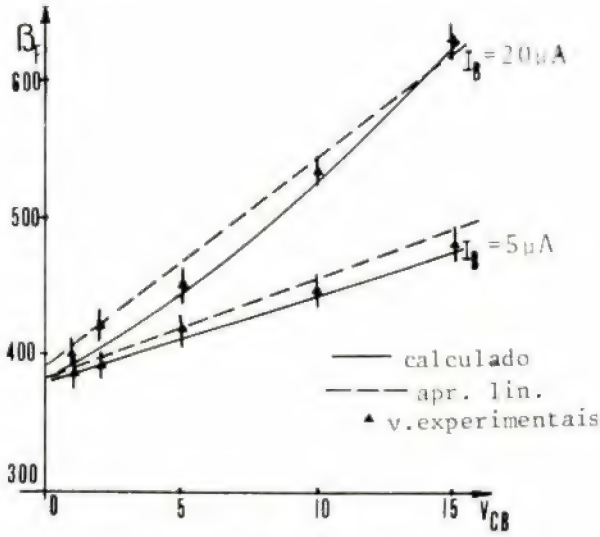


FIG. 3

A partir dos valores da Tabela I, obteve-se por regressão linear de mínimos quadrados $\beta_F(0) = 380$ e $V_N = 0{,}254V$. Procedendo identicamente para os valores da Tabela II, resulta $\beta_F(0) \cdot B = 0{,}985$. Entrando com o valor de catálogo $R_\theta = 500°CW^{-1}$, obtém-se $b = 1{,}9.10^{-3}$ $°C^{-1}$, que se encontra dentro da faixa de valores normais para os transistores de silício.

As características a I_B constante da fig. 3, traçadas por exemplo para $I_B = 5\mu A$ e $I_B = 20\mu A$, são obtidas a partir da expressão

$$\beta_F = \frac{\beta_F(0) + V_{CB}/V_N}{1 - [B\beta_F(0)\, I_B]\, V_{CB}} \qquad (44)$$

Apresentam-se ainda nesta figura as características obtidas experimentalmente em c), incluídas na Tabela III; verifica-se que seguem (44) com alguma aproximação.

No sentido de comparar estes resultados com os obtidos por Logan **[5]**, ou Hart **[6]**, efectuamos uma regressão linear dos dados experimentais por mínimos quadrados, do tipo

$$\beta_F \simeq \beta_F(0) + K\ V_{CB} \qquad (45)$$

que se justifica porque o termo quadrático da expansão de (44) é pequeno. A Tabela IV apresenta os valores de $\beta_F(0)$ e de K resultantes, e a tensão medida de Early $V'_{AO} = \beta_F(0)/K$. Comparam-se também os resultados obtidos por aproximação linear da série de Taylor para $V_{CB} = 0$.

$$\beta_F \simeq \beta_F(0) + \left.\frac{\partial \beta_F}{\partial V_{CB}}\right|_{\substack{I_B \\ V_{CB}=0}} V_{CB} \qquad (46)$$

ou seja

$$\beta_F \simeq \beta_F(0) + V_{CB}\left(1/V_{AO} + I_C(0)R_\theta\right) = \beta_F(0) + K'\ V_{CB} \qquad (47)$$

Como seria de esperar, esta aproximação é válida apenas para correntes de colector muito pequenas (correspondentes na fig. 3 a, por exemplo $I_B = 5\mu A$), ou para valores pouco elevados de V_{CB}.

TABELA IV

$I_B(\mu A)$	$\beta_F(0)$	$K(V^{-1})$	$V'_{AO}(V)$	$K'(V^{-1})$
5	383	7,0	54,7	5,9
10	386	9,5	40,6	7,8
15	387	12,6	30,7	9,6
20	389	15,3	25,4	11,5

4 — CONCLUSÕES

Estabeleceu-se o efeito da realimentação térmica num transistor bipolar sobre a tensão de Early, distinguindo-se entre uma tensão de intersecção «interna» V_{AO}, característica do transistor, e a medida experimental V'_{AO}, variável com as condições de polarização e com a temperatura.

Reconhecem-se as limitações dos métodos experimentais, sobretudo no que se refere à precisão das medidas, em particular para o regime de impulsos. O tempo gasto em cada uma limita fortemente o seu número; obter-se-iam resultados mais interessantes e fiáveis a partir duma bancada automática de medida.

5 — AGRADECIMENTO

A realização deste trabalho foi suportada por uma Bolsa de Estudo do INIC no País.

REFERÊNCIAS

[1] **H. K. Gummel, H. C. Poon,** Bell Sys. Tech. J., 49, pp. 827-852, May-June 1970.

[2] **F. A. Lindholm, D. J. Hamilton,** Proc. IEEE (letters), pp. 1377-1378, Sept. 1971.

[3] **W. J. McCalla, W. G. Howard,** IEEE J. Solid-State Circuits pp. 15-19, Feb. 1971.

[4] **L. W. Nagel, D. O. Pederson,** 19th Midwest Symposium on Circuit Theory, Waterloo, Ontario, 12 Apr. 1973.

[5] **J. Logan,** Bell Sys. Tech. J., 50, pp. 1105-1147, Apr. 1971.

[6] **B. L. Hart, R. W. J. Baker,** Electron. Lett., vol. 12, pp. 174-175, Apr. 1, 1976.

[7] **G. Meijer,** IEEE J. Solid-State Circuits, submitted for publication.

[8] **J. Logan,** Proc. IEEE (Letters), pp. 335, March 1972.

[9] **F. A. Lindholm, P. Rohr, D. J. Hamilton,** Proc. IEEE (Letters), pp. 335-336, March 1972.

[10] **O. Muller,** Proc. IEEE, vol. 52, pp. 924-930, Aug. 1964.

[11] **P. R. Gray,** *Electrothermal Integrated Circuits,* Ph. D. dissertation, chap. 6, the University of Arizona, Tucson, Ariz., 1969.

[12] **J. W. Slotboom, and H. C. de Graaf,** Solid-State Electron., vol. 19, pp. 857-862, Oct. 1976.

(Continuação da pág. 232)

NOTICIÁRIO

AÇOS AUMENTAM 3 A 4 POR CENTO

Entraram em vigor na passada segunda-feira os novos preços de dois produtos produzidos pela Siderurgia Nacional — a folha de flandres e os perfilados — que em relação aos anteriores, sofreram um aumento de três a quatro por cento.

Segundo o director daquela empresa pública afirmou à Imprensa, tinha sido prevista em Janeiro a necessidade de um aumento de 6 a 7 por cento. No entanto, a revalorização do escudo levou a empresa a concluir que não havia necessidade de concretizar um aumento tão elevado, e daí os 3 a 4 por cento.

Contudo, a continuar o deslizamento do escudo, dentro de dois ou três meses os preços de outros produtos da Siderurgia serão novamente actualizados com os europeus.

(Informação do «Expresso», de 1-3-80)

(Continua na pág. 244)

M
a "via"
mais rápida
no domínio dos
transportes
urbanos
METROPOLITANO DE LISBOA

HIDRÁULICA GERAL

Pelo Professor

Alberto Abecassis Manzanares

1.º VOLUME

— **FUNDAMENTOS TEÓRICOS** Preço 675$00

2.º VOLUME

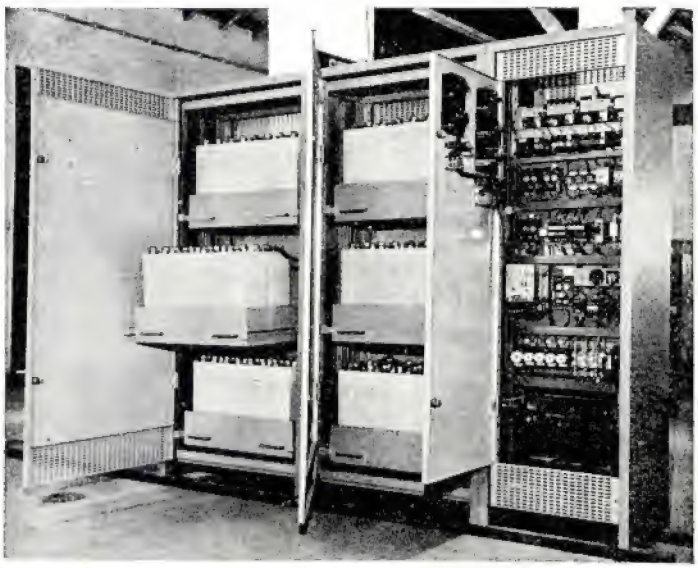
— **ESCOAMENTOS LÍQUIDOS**

(A SAIR BREVEMENTE)

PEDIDOS À TÉCNICA

TUDOR

Alimentadores de C.C. para Serviço Estacionário



A TUDOR projecta e fabrica alimentadores e carregadores de bateriais para todos os fins obedecendo às mais exigentes especificações.

Características Eléctricas

Carregador Principal

- Tensão de alimentação . . 3 x 380V ± 10% 50 Hz ± 5%
- Potência Nominal . . . . .3x3 KW
- Funcionamento . . . . . .Regime flutuante estabilizado

Carregador Adicional

- Potência Nominal . . . . .0,3 KW
- Funcionamento . . . . . .Regime Tampão

Bateria

- Alcalina de Cádmio Níquel

BLOCO para alimentação de permanência e Socorro dos equipamentos de Protecção e Comando dos Serviços Auxiliares das subestações.
Fabricado para a EDP e E.P.

SOCIEDADE PORTUGUESA DO ACUMULADOR TUDOR, SARL. R. Actor Tasso 1 — Tel. 56 21 12

Propagation characteristics on a continuously slotted coaxial cable

ANTÓNIO SIMÃO DE CARVALHO FERNANDES
Universidade Técnica de Lisboa (I. S. T.)
Centro de Electrodinâmica (I. N. I. C.)

RESUMO

Apresenta-se o estudo de um dos modos de propagação ao longo de um cabo coaxial com uma fenda longitudinal continua. É usada uma análise modal para descrever os campos no interior, no exterior e na fenda. O resultado mostra que um modo quase-TEM, onda lenta, se pode propagar um VHF nesta estrutura.

ABSTRACT

The properties are studied of a continuously slotted cable in free space. A modal analysis is used with a set of series to describe the fields and the slot functions. The results show that a quasi-TEM mode, slow wave, can propagate in such a structure, at VHF.

1 — INTRODUCTION

This study follows the theory proposed by G. Hockham (1973) to analyse the propagation characteristics of a continuously and longitudinally slotted coaxial cable — Fig. 1. It was felt that a dielectrically loaded cable, in free space, would possess a phase constant β, larger than the free space wave number k_o and, as such, was non-radiating.

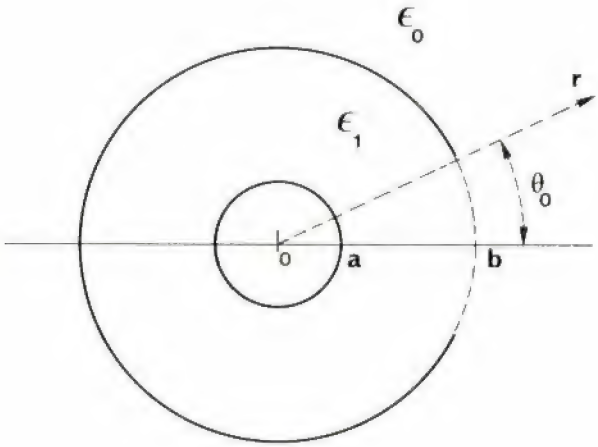


FIG. 1

Cross section of a continuously slotted coaxial cable

In order to find the quasi-TEM slow wave, a modal analysis is used which will expand the total field as a discrete set of modes, all propagating with the same phase velocity. This technique has been adopted by Clarricoats and Slinn (1967) and Clarricoats, Oliner and Olver (1967) to the study of leaky wave structures.

The analysis is made on the following assumptions:

— a perfect dielectric fills the interior of the cable;

— infinite conductivity for inner and outer conductors;

— outer conductor with zero thickness;

— infinitly long cable situated in free space;

— the mode exists on the line propagating in the $+z$ direction with a dependence $e^{-j\beta z + j\omega t}$.

2 — CHARACTERISTIC EQUATION AND PROPAGATION CONSTANT

The fields are expanded in terms of the Electric and Magnetic Hertzian Potential functions ϕ_e and ϕ_h, which

Manuscrito recebido para publicação em 4/5/78.

must be a solution to the following wave equation in cylindrical coordinates.

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \phi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}+k_o^2\,\phi=0$$

The expansions are made in the regions $a \leqslant r \leqslant b$ (equations (2) and (3)) and $r \geqslant b$ (equations (4) and (5)) as two discret sets of terms and then by matching the fields at the common interface; here, the transverse electric and magnetic fields are expanded as an appropriate sum of orthogonal functions, which describe the fields in the slot and are only valid for $-\theta_o < \theta < \theta_o$ (equations (6), (7), (8) and (9))

$$\phi_e = \sum_{m=0}^{\infty} A_m\, F_m(r)\cos m\theta\; e^{-j\beta z} \tag{2}$$

$$\phi_h = \sum_{m=0}^{\infty} B_m\, f_m(r)\sin m\theta\; e^{-j\beta z} \tag{3}$$

$$\phi_e = \sum_{m=0}^{\infty} C_m\, K_m(h_o\, r)\cos m\theta\; e^{-j\beta z} \tag{4}$$

$$\phi_h = \sum_{m=0}^{\infty} D_m\, K_m(h_o\, r)\sin m\theta\; e^{-j\beta z} \tag{5}$$

$$E_{\theta_b} = j\sum_{n=1}^{\infty} E_n \cos\left[\frac{(2n-1)\,\pi\,(\theta+\theta_o)}{2\,\theta_o}\right] e^{-j\beta z} \tag{6}$$

$$E_{z_b} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \sin\left[\frac{(2n-1)\,\pi\,(\theta+\theta_o)}{2\,\theta_o}\right] e^{-j\beta z} \tag{7}$$

$$H_{\theta_b} = j\sum_{n=1}^{\infty} G_n \sin\left[\frac{(2n-1)\,\pi\,(\theta+\theta_o)}{2\,\theta_o}\right] e^{-j\beta z} \tag{8}$$

$$H_{z_b} = \sum_{n=1}^{\infty} H_n \cos\left[\frac{(2n-1)\,\pi\,(\theta+\theta_o)}{2\,\theta_o}\right] e^{-j\beta z} \tag{9}$$

where

A_m, B_m, C_m, D_m, E_n, F_n, G_n and H_n are constants to be determined

$F_m(r) = I_m(h_I\, r)\;\; Y_m(h_I\, a) - I_m(h_I\, a)\;\; Y_m(h_I\, r)$

$f_m(r) = I_m(h_I\, r)\;\; Y'_m(h_I\, a) - I'_m(h_I\, a)\;\; Y_m(h_I\, r)$

$h_I = \sqrt{k_o^2\,\varepsilon_r - \beta^2}$ (Transverse wave number in medium $\varepsilon_I = \varepsilon_o\,\varepsilon_r$)

$h_o = \sqrt{\beta^2 - k_o^2}$ (Transverse wave number in medium ε_o)

— the prime in the Bessel functions indicates the first derivative in order to $(h_I\, r)$

The inside and outside field expressions can be evaluated using the known relations between the field and the Hertzian potentials.

The field expressions must be integrated over the boundary line of the slot and the expansions of the boundary functions must match the inside and outside fields.

In order to calculate the characteristic equation, the boundary conditions for the tangential components of the electric field, over the slot and over the conducting wall of the outer conductor, were used as well as for tangential components of the magnetic field over the slot. For the latter, use was made of the orthogonal properties of the aperture functions.

The characteristic equation is written in the following form:

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n\, T^1_{rn} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\, T^2_{rn} \qquad \text{for } r = 1, 2, 3, \ldots NM$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} F_n\, T^3_{rn} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n\, T^4_{rn} \qquad \text{for } r = 1, 2, 3, \ldots NM \tag{10}$$

The condition that the determinant of (10) must be zero determines the value of the propagation constant. The T functions are shown in appendix.

In general β is a complex quantity; if its value is greater than k_o, a surface wave (slow wave) is propagating along the cable and, as in this analysis the dielectric and the conductors are considered perfect, its value must be real. With a real β, larger than k_o, the transverse wave number h_o is also real giving radially evanescent outside fields. A coaxial cable filled with the dielectric ε_I will have a propagation mode with $\beta = k_I$; in the slotted coaxial cable part of the energy will travel outside the coaxial structure, through air (ε_o), and so the propagation constant will be slightly smaller. A solution of the characteristic equation can then be expected for values of β that must be real, larger than k_o and slightly smaller than k_I.

The determinant of the system of equations (10) should have, theoretically, an infinite number of lines (the series in n or r) and each term is, in itself, a summation of infinite terms (the series in m). The formulation of the problem is only exact as theoretically presented, but for its numerical solution on a computer, it is necessary to truncate the infinite series after a finite number of terms. Several criteria for the most accurate truncation of the series were used, as well as a study by Masterman (personal communication, 1969) of the mode conversion in longitudinal waveguide discontinuities and the conclusion reached was the following: if NM is the highest order of the series in n or r and MM is the

highest order of the series in m, then it is necessary that $MM = (2NM-1)\ \pi/(2\,\theta_o)$, $2\,\theta_o$ being the slot angle.

A numerical calculation was made for f = 100 MHz and the results are shown in tables 1, 2 and 3. The dependence of the propagation constant on the slot angle, the permittivity of the inside diellectric and the ratio of the radii is very small; for practical purposes it is then logical to consider the propagation constant of slotted cables with any ratio of radii, values of the permittivity of the inside dielectric between ε_o and 3 ε_o and a slot angle smaller than 120°, to be $\beta \simeq k_1$. Practical measurements have been carried out with several commercial cables confirming a propagation constant practically equal to k_1 but the small variations predicted by the theory could not be detected as the experimental error was of the order of ± 1.5 %. With a specially made short length of cable (with b/a = 5.5/1.58, 60° slot and paraffin wax dielectric $\varepsilon_r = 2.3$), $\beta/k_1 \times 100$ was measured to be 98.9 % whilst the predicted value was 99.7 %.

3 — CHARACTERISTIC IMPEDANCE

The characteristic impedance is easily evaluated from the transmitted power and the voltage. With the field coefficients normalized to one watt input power and using a TEM approximation, the values shown in table 4 were calculated giving a good degree of agreement with practical measurements. For cables with no outer dielectric sleeve the slot has a considerable influence, increasing the value of the characteristic impedance; however, the existence of a dielectric sleeve almost completely compensates this effect; the final conclusion, considering the dependence with the slot, is that slotted cables with outer dielectric sleeves keep the value of the characteristic impedance approximately constant for all slot angles, up to 180°.

Theoretical values also showed that the effect of the slot is more important for cables with a higher permittivity inside dielectric and is approximately constant for cables with several ratio of radii.

4 — RADIAL DECAY OF THE DENSITY OF POWER

The wave propagates along the guiding structure dividing itself between the inside and outside of the cable. At VHF, the percentage of power that travels inside the coaxial structure is very high. For a solid polythene dielectric ($\varepsilon_r = 2.26$), at 100 MHz and a 60° slot, this power is of the order of 95 % whilst for 180° it is still 85 %; for a polythene foam ($\varepsilon_r = 1.5$), and 60° slot the inside power is even higher — 98 %. These numbers show that the wave may travel with no significant influence from the environment.

The outside fields decay radially extremely quickly. The theory shows that the slot aperture is not very important — Fig. 2 and a higher dielectric constant implies a higher density of power close to the cable but a higher radial decay — Fig. 3.

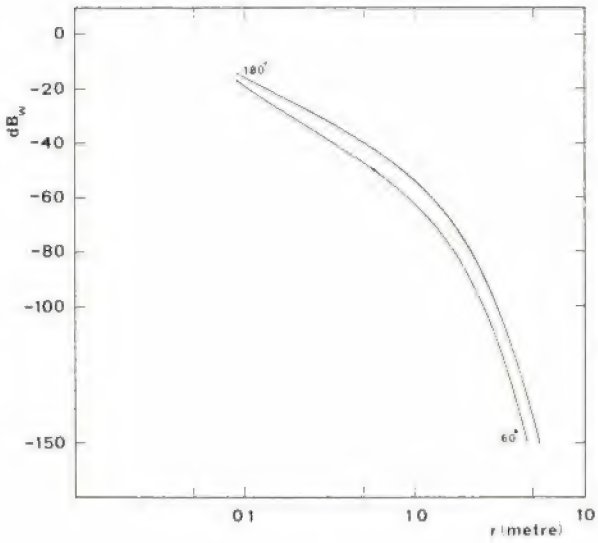


FIG. 2

Decay of the outside density of power along a perpendicular direction to the cable, for two values of the slot angle. (b/a = 8, ε_r = 2.26, f = 100 MHz)

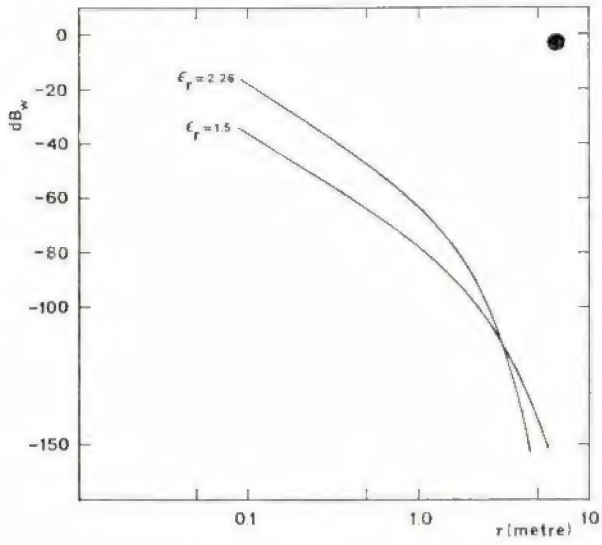


FIG. 3

Decay of the outside density of power along a perpendicular direction to the cable, for two values of the inside dielectric constant. (b/a = 8, slot 60°, f = 100 MHz)

The influence of the slot was checked experimentally but the theoretical rate of decay was found to be far higher than the one measured, both in an anechoic chamber and in real environments; according to an experiment with a similar cable (64° slot) over a plane ground the measured signal was about — 90 d Bw at 3.5 metres

presenting a relatively slow decay such that, at 100 metres, the signal was still of the order of — 125 d Bw. The important discrepancy between predicted and measured transversal fields, is due mainly to two factors: firstly, the radiation caused by discontinuities along the cable, where the feeding and load ends play an important role, which was checked in a real environment and, with higher precision, in an anechoic chamber. Secondly, the existence of a ground plane affects the propagation conditions of the mode and allows the propagation of a second one which will have a very different transversal decay.

5 — LOSSES

Evaluation of the losses was carried out assuming a surface resistance for the conductors and a loss factor for the dielectric; also, the TEM approximation was used. For the inner conductor, values were found which are slightly smaller than those for the equivalent coaxial cable; a 180° slot gives about 83 % and a 60° slot 86 %.

For the outer conductor the calculation was not done as the fields, in the region $r=b$, need about 15 terms to converge, making the calculation extremely time consuming. However, there are no reasons to believe that the figures would be vastly different from those of the equivalent coaxial cable.

As for the dielectric, assumed to be solid polythene, a power factor of 0.0002 implied 1.73 dB/km.

Summing up all the calculated losses including an assumed coaxial cable outer conductor loss, the figure determined for a cable with $b/a=8/1$, $\varepsilon_r=2.26$ and 60° slot is $\alpha=23.2$ dB/km. Practical measurements of the insertion loss showed 30 dB/km; the discrepancy, we think, may be explained by two factors: a near non-perfect conducting ground will introduce extra losses and this ground creates conditions for the simultaneous propagation of a second mode to which power is transferred from the quasi-TEM mode; if this second mode propagates mainly outside the coaxial cable, its power will not completely be received in a coaxial load (receiver) thus increasing the difference between input power and received power.

6 — POLARIZATION AND CIRCULAR SYMMETRY

A TEM mode, by definition, would present only transversal fields; to take into account the boundary between dielectrics and the absence of circular symetry, the existence of axial components becomes necessary. Still the quasi-TEM mode remains basically transversal as illustrated in Fig. 4; this predicted difference between the axial and the transversal fields was found to be in good agreement with practical measurements.

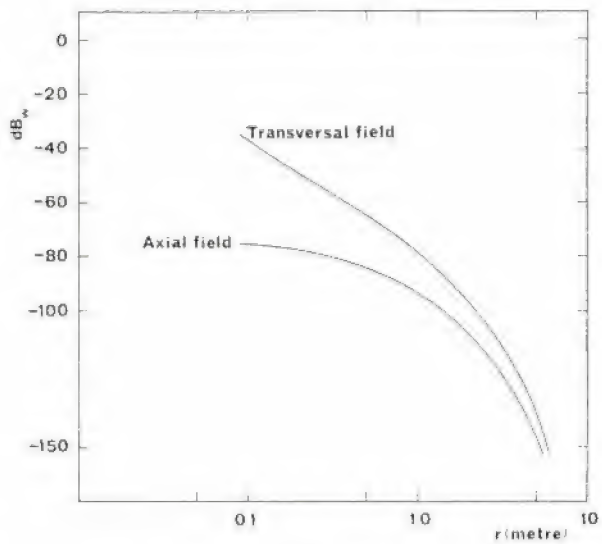


FIG. 4

Decay of the outside density of power along a perpendicular direction to the cable, considering the transversal and the axial fields. ($b/a = 8$, $\varepsilon_r = 1.5$, slot 60°, f = 100 MHz)

At larger distances than the order of ten cable diameters the field distribution was found to be practically independent of the slot position, a fact that was also checked in real environments and in the anechoic chamber.

7 — CONCLUSIONS

A study of the propagation characteristics, in VHF, of a slotted coaxial cable in free space, was carried out assuming the existence of a quasi-TEM mode. The mathematical method used was a modal analysis which treated the mentioned mode as a sum of an infinite number of coupled waves, all of which propagate with the same phase velocity.

Concerning the influence of the slot, dielectric and ratio of radii, it has been found that the propagation constant remains very close to $k_l=k_o\sqrt{\varepsilon_r}$, of those considered the 180° slot cable being the worst case, having a value of 97 % of k_l, for $\varepsilon_r=2.26$.

The characteristic impedance of the cable and its dependence with the slot angle, dielectric and ratio of radii was calculated; for cables with no outer dielectric sleeve the slot has a considerable influence, increasing its value, in relation to the value of the equivalent coaxial cable, by more than 30 %. The effect of the slot is more important for cables with a higher permittivity dielectric inside and is aproximately constant for cables with several ratio of radii. However, the decreasing value of the cable's capacitance with increasing slot aperture is almost completely compensated by the increasing effect of the outer dielectric sleeve.

The proportion of the power that travels inside the coaxial structure is quite high, especially for smaller slots, smaller relative dielectric constants and smaller ratio of radii.

The losses were found to be of the same order as the equivalent coaxial cable.

The outside fields were found to decrease extremely fast losing about 60 dB within the first metre and presenting rates of about 100 dB per distance doubling at 6 metres from the cable axis, at a frequency of 100 MHz.

Finally, the transversal fields are considerably higher than the axial ones and the field was found to have circular symmetry at distances larger than about 10 times the diameter of the cable.

APPENDIX

The determinant of (10) is of order (2r x 2r)

$$\begin{bmatrix} T^1_{rn} & -T^2_{rn} \\ T^3_{rn} & -T^4_{rn} \end{bmatrix} = 0$$

and the T functions are the following

$$T^1_{rn} = \sum_{m=0}^{\infty} J_{rm} J_{nm} \left\{ \frac{k_o b}{\varepsilon_m} \left[\frac{\varepsilon_r}{h_l b} \frac{F'_m(b)}{F_m(b)} + \frac{K'_m(h_o b)}{h_o b\, K_m(h_o b)} \right] - \frac{m^2 \beta^2 b}{k_o \varepsilon_m} \left[\frac{1}{h_l^3 b^3} \frac{f_m(b)}{f'_m(b)} + \frac{1}{h_o^3 b^3} \frac{K_m(h_o b)}{K'_m(h_o b)} \right] \right\}$$

$$T^2_{rn} = \sum_{m=0}^{\infty} J_{rm} I_{nm} \frac{m\beta}{k_o} \left[\frac{1}{h_o b} \frac{K_m(h_o b)}{K'_m(h_o b)} - \frac{1}{h_l b} \frac{f_m(b)}{f'_m(b)} \right]$$

$$T^3_{rn} = \sum_{m=0}^{\infty} J_{nm} I_{rm} \frac{m\beta b}{\varepsilon_r} \left[\frac{1}{h_l b} \frac{f_m(b)}{f'_m(b)} - \frac{1}{h_o b} \frac{K_m(h_o b)}{K'_m(h_o b)} \right]$$

$$T^4_{rn} = \sum_{m=0}^{\infty} I_{rm} I_{nm} \left[h_l b \frac{f_m(b)}{f'_m(b)} + h_o b \frac{K_m(h_o b)}{K'_m(h_o b)} \right]$$

where:

$$I_{nm} = \int_{-\theta_o}^{\theta_o} \cos \left[\frac{(2n-1)\pi(\theta+\theta_o)}{2\theta_o} \right] \sin m\theta \, d\theta$$

$$J_{nm} = \int_{-\theta_o}^{\theta_o} \sin \left[\frac{(2n-1)\pi(\theta+\theta_o)}{2\theta_o} \right] \cos m\theta \, d\theta$$

$I_{rm} = I_{nm}$ (changing r for n)

$J_{rm} = J_{nm}$ (changing r for n)

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & m \neq 0 \\ 2 & m = 0 \end{cases}$$

$$F_m(b) = J_m(h_l b)\, Y_m(h_l a) - J_m(h_l a)\, Y'_m(h_l b)$$

$$f_m(b) = J'_m(h_l b)\, Y'_m(h_l a) - J_m(h_l a)\, Y'_m(h_l b)$$

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was carried out at Standard Telecommunication Laboratories, Harlow and permission to publish is acknowledged with thanks. The helpful discussions with Mr. Quin Davis, from the University of Surrey, Mr. Rolf Johannessen, Mr. Peter Deane and Mr. John Greenwood from STL are gratefully acknowledged, as it is the assitence of Mr. G. Walker and Mr. B. Gaunt with computation problems.

REFERENCES

[1] **Clarricoats, P. J. B.** and **K. R. Slinn (1967)**, *Computer Method of Determining the Propagation Coefficient of Slotted Waveguides*, Electronic Letters, May, Vol. 3, N.º 5, pp. 191-192.

[2] **Clarricoats P. J. B., A. A. Oliner** and **A. D. Olver** (1967), *Propagation Behaviour of Slotted Inhomogeneous Circular Waveguides*, Proc. I. E. E., April, Vol. 114, N.º 4, pp. 457-464.

[3] **Hockham, G. A., R. Johannessen, R. G. Ely** and **J. C. Greenwood (1973)** (STL private communication).

TABLE 1

Dependence of the propagation constant on the slot aperture (b/a = 8, ε_r = 2.26)

Slot	$\beta/k_1 \times 100\,\%$
30°	99.9
60°	99.7
90°	99.4
180°	97.4

TABLE 2

Dependence of the propagation constant on the inside dielectric (b/a = 8, slot 60°)

ε_r	$\beta/k_1 \times 100\,\%$
1.5	99.96
2.25	99.68

TABLE 3

Dependence of the propagation constant on the ratio of radii (ε_r = 1.5, slot 60°)

b/a	$\beta/k_1 \times 100\,\%$
2.6	99.95
8	99.97

TABLE 4

Dependence of the characteristic impedance, Z_{ch} (normalized to the value of the characteristic impedance of the equivalent coaxial cable, Z_{cc}), on the slot. (b/a = 8, ε_r = 2.26)

Slot	Z_{ch}/Z_{cc}	
	Calculated Values	Measured Values
60°	1.133	1.100
180°	1.315	1.330

NOTICIÁRIO

(Continuação da pág. 238)

MARQUES VIDEIRA, PRESIDENTE DA SIDERURGIA

Fernando Marques Videira, ex-ministro da Indústria e Tecnologia do V Governo Constitucional, será o novo presidente do Conselho de Administração da Siderurgia Nacional, abandonando as funções que exerce na EDP.

(Informação do «Expresso», de 15-3-80)

Resumo dos Artigos publicados na «Técnica» n.º 456

Ano LV — Janeiro 1979

CALDINHAS, António O.; BRANCO, Fernando A. B.; AZEVEDO, João José R. T. — *Aplicação de diversos métodos de cálculo ao estudo de uma laje contínua de dois tramos*, «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, p. 189-199.

No presente artigo faz-se uma análise comparativa dos resultados obtidos por diversos métodos de cálculo de lajes, aplicados a um problema concreto. Descrevem-se os métodos e as expressões de cálculo utilizados, comparando-se por fim os resultados analítica e graficamente.

DURÃO, D. F. G.; MELLING, A.; BAYLISS, R. K. e SAYCE, I. G. — *Medição com a anemometria do laser das velocidades do escoamento e das partículas por ele transportadas num arco de plasma D. C.*, «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, p. 227-232.

Neste artigo descreve-se o uso da anemometria do laser para medição das velocidades do escoamento e das partículas por ele transportadas num jacto de plasma D. C., o qual usa efeitos magnetohidrodinâmicos na injecção de partículas à volta do cátado. Foram testadas as técnicas de «forward» e «back» «scatter» usando laseres de 5 mW e de 1.0 W de Argon, conjuntamente com diferentes maneiras de processamento do sinal Doppler. A dimensão das partículas injectadas variava de 1 μm a 200 μm.

O equipamento mais barato de modo a fornecer resultados satisfatórios compreendia um laser de He-Ne de 5 mW usado em «forward scatter» e um analisador de frequências para processamento do sinal. As velocidades dentro da zona mais quente do jacto iam de 30 a 150 m/s para o gás e 5 a 30 m/s para as partículas.

RODRIGUES, F. Peres — *Evolutas das cónicas. Estudo das suas prncipais caracteristicas*, «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, p. 201-212.

Determinam-se, a partir das equações focais dos três géneros de cónicas, as correspondentes evolutas, estudando-se em seguida algumas das suas principais propriedades métricas e não métricas.

TEIXEIRA, P. L. Borges — *Notas sobre o comportamento térmico da tensão de Early e do ganho de corrente dum transistor de junção bipolar*, «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, 233-238.

Faz-se intervir a realimentação térmica na análise da dependência do ganho de corrente com a temperatura e com a polarização. Estabelece-se a distinção entre a tensão de Early interna, característica do dispositivo, e a tensão de intersecção, obtida em certas condições. Apresentam-se determinações experimentais.

FERREIRA PINTO, A. F. e BARROS, A. F. — *Algumas ocorrências scheelíticas em rochas calco-silicatadas do norte de Portugal*, «Técnca», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, p. 213-226.

No presente trabalho continua-se o estudo de afloramentos de rochas calco-silicatadas com mineralizações scheelíticas. Trata-se de afloramentos de pouca representação incluídos em retalhos xistosos de idade ante-ordovícica e silúrica que estão incluídos em rochas granitóides e que se localizam nas Províncias do Minho, Trás-os-Montes e Alto Douro. Relativamente a cada uma das ocorrências, referem-se alguns aspectos geológicos e a análise petrográfica. No final apresentam-se considerações genéticas.

Embora não revelando interesse económico pela fraca representatividade e pela mineralização scheelítica finamente dispersa e pouco abundante o estudo de tais afloramentos tem interesse no possível estabelecimento de guias de prospecção da scheelite e pelo contributo para o conhecimento da composição litológica do Complexo Xisto-Grauváquico e do Silúrico.

FERNANDES, A. S. Carvalho — *Características da propagação dum modo quase-TEM ao longo dum cabo coaxial de fenda longitudinal contínua*, «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, p. 239-244.

Apresenta-se o estudo de um dos modos de propagação ao longo de um cabo coaxial com uma fenda longitudinal contínua. É usada uma análise modal para descrever os campos no interior, no exterior e na fenda. O resultado mostra que um modo quase-TEM, onda lenta, se pode propagar um VHF nesta estrutura.

Synopsis of articles published in «Técnica» n.º 456

LV January 1979

DURÃO, D. F. G.; MELLING, A.; BAYLISS, R. K. e SAYCE, I. G. — *Measurement of particle and gas velocities n DC arc heter using laser doppler anemometry,* «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, p. 227-232.

The paper describes an investigation using Doppler anemometry to measure gas and particle velocities within a DC arc plasma heater, which employs magnetohydrodynamically assisted particle injection around the cathode tip. Both forward and back scatter techniques were tested using a 5 mW He-Ne laser and an 1.0 W argon ion laser. Several signal processing arrangements were also tested. A variety of particle feedstocks were used ranging in size from 1 μm to over 200 μm.

The least expensive system to yield satisfactory results employed the low power He-Ne laser in the forward scattering mode, coupled with a spectrum analyser for signal processing. Typical axial velocities within the hot zone were found to be in the range 30-150 m/s for the gas, 5-30 m/s for the feedstock particles.

TEIXEIRA, P. L. Borges — *Comments on the thermal behaviour of the Early voltage and the current gain of a bipolar junction transistor,* «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, p. 233-238.

The temperature and bias dependency of the current gain is discussed taking the thermal feedback inside the device into consideration. Distinction is made between an «internal» Early voltage, and an intercept voltage measured under certain conditions. Experimental results are presented.

FERNANDES, A. S. Carvalho — *Propagation characteristics on a continuously slotted coaxial cable,* «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, 239-244.

The properties are studied of a continuously slotted cable in free space. A modal analysis is used with a set of series to describe the fields and the slot functions. The results show that a quasi-TEM mode, slow wave, can propagate in such a structure, at VHF.

CALDINHAS, António O.; BRANCO, Fernando A. B.; AZEVEDO, João José R. T. — *Application of some calculation methods to the study of a continuos plate with two panels,* «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, p. 189-199.

A comparative analysis of the results obtained from some methods for plates calculation, applied to a concret problem, is shown in this paper. It begins with a description of the methods and the calculation expressions used Finally an analitical and graffical comparation of the results is made.

RODRIGUES, F. Peres — *Evolutes of the conics study of their main characteristics,* «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, 201-212.

From the focal equations of the three types of conics the corresponding evolutes are obtained. Thereafter, some of the main metric and non-metric properties of the evolutes are studied.

FERREIRA PINTO, A. F. e BARROS, A. F. — *Some occurrences of scheelite in calc-silicate rocks from Northern Portugal,* «Técnica», Lisboa, LV (456) Jan. 1980, p. 213-226.

Some ante-Ordovician and Silurian rocks intruded by Hercynian granitic magma in Minho, Tras-os-Montes and Alto-Douro originated skarns and amphibolites with scheelite. Some geological notes, petrography and genetic considerations are given.

Although the scheelite mineralization is poorly disseminated, so it has no economic interest, this note tris to contribute to the possible preparation of prospecting guides of scheelite and to the study of the litology of the Schist — Metagraywacke Complex and of the Silurian.

Edições da Técnica

TABELA DE PREÇOS

TABELAS PARA O CÁLCULO DO BETÃO ARMADO

Brazão Farinha, 6.ª edição — 1970 . . . . 600$00

TOPOGRAFIA GERAL

C. Xerez — 1.º vol. 3.ª edição — 1978 . . 460$00
C. Xerez — 2.º vol. 2.ª edição — 1966 . . (*)

TABELAS TÉCNICAS

Vicente Ferreira e Brazão Farinha, 8.ª edição 1977 700$00

MANUAL DE HIDRÁULICA GERAL

A. Lencastre, 2.ª edição — 1969 . . . . . 580$00

DICIONÁRIO DE UNIDADES E TABELAS DE CONVERSÃO

Vasco Costa e Osvaldo Francês, 1.ª edição — 1959 (*)

NÚMEROS E VARIÁVEIS COMPLEXAS

A. H. Simões de Abreu, 1.ª edição — 1977 . 400$00

GUIA DE ANÁLISE QUÍMICA DAS ÁGUAS

A. Herculano de Carvalho, 1.ª edição — 1961 200$00

CÁLCULO DE PÓRTICOS

G. Kani — Trad. da 7.ª edição alemã — 1962 150$00

MANUAL DE ESTRUTURAS

Brazão Farinha — 1.º vol. 1.ª edição — 1976 750$00

2.º e 3.º Volumes . . . . . (*)

BETÃO PREESFORÇADO

(A cargo dos participantes na Semana de Betão Preesforçado — I. S. T. — 1975) . . 550$00

HIDRÁULICA GERAL

1 — Fundamentos teóricos, 1.ª ed. — 1979 675$00
2 — Escoamentos Líquidos . . . . . (*)

A. Manzanares

PROPAGAÇÃO E RADIAÇÃO DE ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

1 — Ondas e Meios Materiais, 1.ª ed. - 1979 560$00
2 — Radiação . . . . . (*)

M. de Abreu Faro

Monografia n.º 1

CAUDAL PARA DIMENSIONAMENTO DE ESTRUTURAS HIDRÁULICAS E AMORTECIMENTO DE CHEIAS EM ALBUFEIRAS

António Carvalho Quintela e António Betâmio de Almeida, 1.ª edição — 1975 . . . 10$00

Monografia n.º 2

ESCOAMENTO COM SUPERFÍCIE LIVRE EM CANAIS DE SECÇÃO CIRCULAR

António Betâmio de Almeida, 1.ª ed. — 1978 30$00

(*) LIVROS A PUBLICAR BREVEMENTE

Desconto de 10% aos assinantes

PEDIDOS À **técnica**

Publicidade com critério.

Anuncie na

técnica REVISTA DE ENGENHARIA